Dr M. ČADEŽ
vanredni profesor univerziteta

UVOD
U DINAMIČKU METEOROLOGIJU

I deo

OSNOVI DINAMIČKE METEOROLOGIJE

Izdaje
Savez studenata Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu
Beograd, 1959

PREDGOVOR

Meteorologija se u poslednjim decenijama vrlo brzo razvija. Naročito veliki rezultati su postignuti u dinamičkoj meteorologiji koja tumači pojave kretanja vazduha u Zemljinoj atmosferi. Razumljivo je zbog toga da danas ne postoji neki standardni udžbenik dinamičke meteorologije. Gledišta autora u pogledu sadržine nisu ujednačena. Pogotovo to važi za deo koji se odnosi na probleme iz analize i prognoze vremena, a koji se često odvaja od dinamičke meteorologije u zaseban predmet.

Danas dinamička meteorologija u najvećoj meri služi kao osnov za prognozu vremena, ona ne tumači samo osnovne osobine vazduha i atmosfere sa dinamičke i termodinamičke tačke gledišta, već opisuje i složene pojave u atmosferi, kao što su cikloni i anticikloni, dugi talasi, mlazna struja itd. Sa te tačke gledišta pisan je ovaj udžbenik, imajući stalno na umu da je prognoza vremena jedan od konačnih ciljeva dinamičke meteorologije.

Uvod u dinamičku meteorologiju treba da se sastoji iz dva dela. Taj prvi deo tumači osnovne pojave i zakone dinamike i termodinamike atmosfere. Opisuje razne jednostavne, idealizovane, pojave na način koji je uobičajan u teorijskoj fizici. Drugi deo "Analiza i prognoza vremena" treba, na osnovu poznavanja osnovnih osobina atmosfere, da tumači stvarna zbivanja u atmosferi pod prirodnim uslovima i da govori o prognozama koje se baziraju na saznanjima dinamičke meteorologije.

Ovaj udžbenik je prvenstveno namenjen studentima meteorologije i svim onima koji se interesuju za probleme dinamičke meteorologije. Za čitanje odn. praćenje izlaganja potrebno je poznavanje gradiva iz osnovnih kurseva više matematike i fizike. Autor je nastojao da na što jednostavniji način uputi čitaoca u probleme dinamičke meteorologije. Rad je plod na jednoj strani dugogodišnjeg proučavanja udžbenika dinamičke meteorologije, prvenstveno F. Exnera, V. Bjerknesa i saradnika, H. Ertela, H. Koschmiedera, S. Petterssena i D. Brunta i meteorologije Hann-Süringa, a na drugoj strani dugogodišnjeg posmatranja razvoja vremena.

Literatura u ovom delu nije posebno navedena, ali spomenuta su imena naučnika koji su prvi došli do opisanih saznanja. Navedene su i godine kada su ta saznanja bila objavljena. U dodatku daje se kratak istoriski pregled razvoja dinamičke meteorologije.

Veliki rad izvršio je asistent F. Mesinger pažljivim čitanjem otkucanog rukopisa. Pri tome je stavio svoje vrlo korisne primedbe. Za učinjenu uslugu srdačno mu zahvaljujem. Srdačno zahvaljujem i asistentu B. Dobriloviću koji je ispisao oznake u slikama i D. Vukmiroviću, apsolventu meteorologije, za podatke na osnovu kojih je prikazana radiosondaža u Beogradu (str. 108 i 109).

Posebno zahvaljujem Komisiji za udžbenike Beogradskog univerziteta koja je omogućila izdavanje ovog udžbenika, kao i Studentskoj zadruzi Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu na preuzimanju poslova oko štampanja i izdavanja udžbenika.

Beograd, aprila 1959

Autor

SPISAK UDŽBENIKA KORIŠĆENIH PRILIKOM IZRADE OVOG UDŽBENIKA

F. M. Exner, Dynamische Meteorologie, 2. izd., Wien, 1925.
V. Bjerknes, J. Bjerknes, H. Solberg, T. Bergeron, Physikalische Hydrodynamik, Berlin, 1933.
H. Ertel, Methoden und Probleme der dynamischen Meteorologie, Berlin, 1938.
H. Koschmieder, Dynamische Meteorologie, 3. izd., Leipzig, 1951
S. Petterssen, Weather Analysis and Forecasting, 2. izd., New York, Toronto, London, 1956.
D. Brunt, Physical and Dynamical Meteorology, 3. izd. Cambridge, 1944.
J. Hann, R. Süring, Lehrbuch der Meteorologie, 5. izd., Leipzig, 1939-1950.
F.A. Berry Jr., E. Bollay, N.R. Beers, Handbook of Meteorology, New York, London, 1945.
J. Holmboe, G. Forsythe, W. Gustin, Dynamic Meteorology, New York, London 1952 (treće štampanje izdanja iz 1945. g.).
B. Haurwitz, Dynamic Meteorologie, New York, 1941.

S A D R Ž A J

Str.

I. UVOD

1. Sastav vazduha

Atmosfera, spoljni omotač Zemlje, je smesa raznih gasova od kojih najviše ima azota, kiseonika, argona i vodene pare. U njoj se nalaze velike količine mikroskopski malenih čestica prašine, raznih soli, bakterija i drugih mikroorganizama. Tamo je bezbroj kapljica i snežnih kristalića - sastavnih delova oblaka, a iz nje se neprestano i na raznim mestima izlučuju padavine najraznovrsnijeg oblika i raznih dimenzija.

Vodena para je u atmosferi vrlo nejednako raspoređena i u najvlažnijim oblastima Zemlje zaprema do 4% prostora. Za razliku od toga do visine od oko 20 km međusobni zapreminski odnosi ostalih sastojaka vazduha (suvi deo vazduha) svuda su praktično jednaki. Azot zaprema 78, kiseonik 21 a argon 1% prostora u kome se nalazi suvi deo vazduha. U saglasnosti sa Stručnim pravilnikom, vol. 1. - opšti deo u izdanju Svetske meteorološke organizacije (No. 49, Bd. 2)(prevedeno i umnoženo u Saveznom hidrometeorološkom zavodu u Beogradu) smatraćemo pod <u>suvim vazduham</u> sledeću smesu gasova:

SASTAVNI DEO VAZDUHA	MOLEKULSKA TEŽINA (μ_1)	ZAPREMA PROSTOR U PROCENTIMA ($100V_1:V$)
azot N_2	28,016	78,09
kiseonik O_2	32,000	20,95
argon A	39,944	0,93
ugljen dioksid CO_2	44,010	0,03
neon Ne	20,183	$1,8\cdot10^{-3}$
helijum He	4,003	$5,24\cdot10^{-4}$
kripton Kr	83,7	$1,0\cdot10^{-4}$
vodonik H_2	2,0160	$5,0\cdot10^{-5}$
ksenon Xe	131,3	$8,0\cdot10^{-6}$
Ozon O_3	48,0000	$1,0\cdot10^{-6}$
radon Rn	222	$6,0\cdot10^{-18}$

(u prevodu omaškom mesto vrednosti 39,944 za molekulsku težinu argona stoji vrednost 39,994). Ovakav sastav sa potpuno zadovoljavajućom tačnošću reprezentuje suvi vazduh odn. suvi deo vlažnog vazduha donjeg dela atmosfere, otprilike do visine 20 km.

Makoji sastojak suvog dela vazduha pri atmosferskim pritiscima i pri temperaturama većim od - 150°C ne pretvara se u tečno ili čvrsto stanje. Zbog toga možemo za potrebe dinamičke meteo -

rologije svaki sastojak suvog vazduha, kao i suvi vazduh sam, smatrati za potpun (idealan) gas, tj. kao gas u kome kohezione (međumolekulske sile) ne postoje.

Pored spomenutih gasova vazduh sadrži i male količine jodove pare, amonijaka - proizvoda trulenja i još druge gasove koji su za meteorološka zbivanja potpuno beznačajni.

2. Veličine stanja vazduha

Temperatura, pritisak i gustina su osnovne veličine stanja vazduha.

1. Temperatura (toplotno stanje) vazduha meri se termometrom. Kao mernu jedinicu upotrebljavaćemo stalno Celsius-ov stepen. Upotrebljavaćemo i Celsius-ovu i apsolutnu (Kelvin-ovu) skalu. Između Celsius-ove temperature (t) i apsolutne temperature (T) postoji sledeća veza:

$$T = 273,2 + t$$

Temperatura je skalarna veličina.

2. Pritisak merimo barometrom. U kg-m-sec sistemu mera, kojim ćemo se prvenstveno služiti, jedinica za pritisak je 1 kg $m^{-1}sec^{-2}$. Taj pritisak brojno je jednak sili pritiska od 1 kg m sec^{-2} koja deluje na površinu 1 m^2. Ako na elemenat površine $d\sigma$ deluje sila dP, onda zbog dejstva te sile deluje na površinu $d\sigma$ pritisak

$$p = \frac{dP}{d\sigma} \qquad (1)$$

Kroz makoju tačku koja se u atmosferi zajedno sa vazduhom kreće možemo zamisliti bezbroj površina $d\sigma$ sa raznim orijentacijama. Na svaku od ovih okolni vazduh deluje nekom silom pritiska i svaka od ovih sila u smislu definicije (1) definiše neki pritisak. Kada bi bili svi ti pritisci međusobno jednaki, bilo da je vazduh u stanju mirovanja ili kretanja, bio bi to potpun gas.

Ako pod elementom površine $d\sigma$ podrazumevamo površinu reda veličine 1 cm^2 ili manju, onda možemo vazduh uvek smatrati kao potpun gas. Da je to bar približno tako, vidimo na sledeći način:

Zamislimo precizni aneroid koji se zajedno sa vazduhom kreće. Eksperimenat bi pokazao da bi aneroid pokazivao uvek jedan te isti pritisak, bez obzira na položaj u kome bi se on nalazio. Vidimo da je u potpunoj tačnosti u svakoj tačci definisan jedan i samo jedan pritisak p. Zbog toga je pritisak, slično kao temperatura skalarna veličina.

Za razliku od toga vazduh ne možemo smatrati potpunim gasom ako uzmemo da je $d\sigma$ reda veličine od više kvadratnih metara ili još većeg. Zbog turbulentnosti vazduha zavisi naime atmosferski pritisak na zamišljenoj površini $d\sigma$ od njene orijentacije.

Na meteorološkim stanicama pritisak se meri živinim barometrom. Ali ovim instrumentom obično se ne meri neposredno atmosferski pritisak, njime se meri samo barometarsko stanje b", tj. visina živinog stuba u barometru (od donjeg do gornjeg nivoa žive)

pri nekoj određenoj temperaturi i na dotičnoj visini i geografskoj širini. Pošto visina živinog stuba, koja se izražava u milimetrima, ne zavisi samo od atmosferskog pritiska već i od temperature barometra i zemljine teže, to treba izvršiti dve redukcije barometra da bi se dobio pritisak. Treba izvršiti redukciju

(2) $$\delta_t = b'' - b'$$

barometra na 0°C i redukciju

(3) $$\delta_s = b' - b$$

barometra na standardno (normalno) zemljino ubrzanje. U ovim jednačinama je

b' = stanje barometra redcirano na 0°C i znači visinu živinog stuba u milimetrima pod uslovom da bi barometar imao temperaturu 0°C a

b = stanje barometra reducirano na standardno ubrzanje i znači visinu živinog stuba u milimetrima u barometru sa temperaturom 0°C koji bi se nalazio u polju standardnog zemljinog ubrzanja

(4) $$g_n = 980,665 \text{ cm sec}^{-2}$$

Do skora se kao normalno zemljino ubrzanje smatralo ono koje postoji na geografskoj širini $\varphi = 45°$ i na srednjoj visini nivoa mora i koje iznosi

(5) $$g_{45,o} = 980,616 \text{ cm sec}^{-2}$$

g_n je novi propis (Stručni pravilnik SMO, No. 49, Bd. 2, 1956), novi gravimetriski podatak koji su usvojili fizičari kao stndardni za merenje pritiska u milimetrima živinog stuba.

Iz jednačina (2) i (3) dobijamo za barometarsko stanje reducirano (svedeno) na standardno ubrzanje

(6) $$b = b'' - \delta_t - \delta_s$$

Ova vrednost pretstavlja pritisak na stanici izražen u milimetrima žive pod standardnim uslovima. Oznaka za ovu jedinicu je 1 $(\text{mm Hg})_n$. Ako se redukcija vrši pomoću (5), oznaka za jedinicu je 1 mm Hg.

Redukcija δ_t zavisi od kubnog koeficienta širenja žive (α_{Hg} = 0,00181), od barometarskog stanja b" i od izrade barometra. U praksi se određuje pomoću tablica. Redukciju δ_s dobijamo očigledno iz relacije

(7) $$g_n b = g b'$$

(g = lokalno zemljino ubrzanje na mestu merenja), što nam daje u vezi sa jedn. (3)

(8) $$\delta_s = \frac{g_n - g}{g_n} b'$$

Ubrzanje zemljine teže zavisi od geografske širine φ, nadmorske visine z i mesnih prilika. Na srednjoj visini površine mora je teorijska vrednost

(9) $$g_{\varphi,o} = 980,616(1 - 0,0026373 \cos 2\varphi + 0,0000059 \cos^2 2\varphi) \text{ cm sec}^{-2}$$

Lokalna vrednost na stanici na kopnu je

(10) $$g = g_{\varphi,o} - 0,0003086\, z - 0,0001118(z - z') \text{ cm sec}^{-2}$$

(z = nadmorska visina stanice, z' = srednja nadmorska visina

stvarne površine područja oblika kruga prečnika oko 150 km sa centrom u datoj tački, z i z' treba izraziti u metrima).

Slično je lokalna vrednost ubrzanja zemljine teže na malom rastojanju z iznad srednje površine mora

(11) $g = g_{\varphi,0} - 0{,}0003086\, z - 0{,}0000688(D-D')$ cm sec^{-2}

(D = dubina mora ispod date tačke, D' = srednja dubina mora na području oblika kruga sa poluprečnikom oko 150 km i sa centrom u datoj tački, sve visine u metrima). Za veće visine treba u obrascima (10) i (11) mesto člana $- 0{,}0003086\, z$ da stoji član

(12) $$\left\{-\left[0{,}00030855 + 0{,}000000227 \cos 2\varphi\right] z + \left[0{,}00007254 - 0{,}00000010 \cos 2\varphi\right] \left(\frac{z}{1000}\right)^2\right\}$$

Vrednosti (9) do (12) treba da se upotrebljavaju u meteorološkim službama u saglasnosti sa pomenutim stručnim pravilnikom.

Koliko iznosi redukcija na normalnu težu za z = 0, b' = 760 mm u zavisnosti od geografske širine, vidimo iz tablice

φ =	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90°
δ_s =	2,01	1,89	1,54	1,00	0,35	-0,35	-1,00	-1,54	-1,89	-2,01 mm

Slično nam sledeća tablica daje neke redukcije barometra na standardno ubrzanje na raznim visinama iznad kopna pri z' = 0 i φ = 45°.

z =	0	500	2000	3000	m
b'=	750	700	600	500	mm
δ_s =	0,04	0,10	0,27	0,33	mm

Kad izvršimo sve potrebne redukcije, dobijamo pritisak u milimetrima žive pod standardnim uslovima $(mm\ Hg)_n$. Očigledno je 1 $(mm\ Hg)_n$ pritisak kojim deluje na mestu standardnog zemljinog ubrzanja na vodoravnu podlogu sloj žive temperature t = 0°C i debljine 1 mm. Do sada se mesto ove jedinice upotrebljavala jedinica 1 mm Hg koja je definisana mesto vrednošću (4) vrednošću (5).

V. Bjerknes predložio je (1906) sledeću jedinicu za merenje pritiska u meteorologiji

$$1 \text{ milibar} = 1 \text{ mb} = 1000 \text{din/cm}^2 = 100 \text{ kg m}^{-1} \text{sec}^{-2}$$

Pošto je gustina žive pri temperaturi 0°C (za svako g) 13,5951 g cm^{-3} (= <u>standardna gustina žive</u>), to je

$$1\ (mm\ Hg)_n = 0{,}1 \cdot 13{,}5951 \cdot 980{,}665 \cdot 10^{-3}\ mb = 1{,}333224\ mb$$

Na osnovu ranijih merenja uzimalo se za gustinu žive pri 0°C vrednost 13,59545 g cm^{-3}, tako da je

$$1\ mm\ Hg = 0{,}1 \cdot 13{,}59545 \cdot 980{,}616 \cdot 10^{-3}\ mb = 1{,}33319\ mb$$

Upotrebljavaju se i sledeće jedinice za pritisak:

1 normalna atmosfera = 1 atm. = 760,0 mm Hg

1kp/cm^2 = 1 tehn. atmosfera = 735,8 mm Hg = 980,06 mb.

1 inč žive pod standardnim uslovima = 1 $(in.Hg)_n$ = 25,4 $(mm\ Hg)_n$

Iz gornjih odnosa dobijamo još:

760,000 mm Hg = 1013,226 mb,
760,000 $(mm\ Hg)_n$ = 1013,250 mb,
1 mb = 0,75008 mm Hg = 0,750062 $(mm\ Hg)_n$ = 0,0295300 $(in.Hg)_n$.

3. Prema definiciji je gustina (<u>specifična masa</u>) vazduha

(13) $$\rho = \frac{dm}{dV}$$

(dm = masa vazduha u elementu zapremine dV). Slično je <u>specifična zapremina</u>

(14) $$\alpha = \frac{dV}{dm}$$

tako da je

(15) $$\alpha\rho = 1$$

U kg-m-sec sistemu, jedinica za gustinu je 1 kg m^{-3} a za specifičnu zapreminu 1 m^3 kg^{-1}. Ako izaberemo beskonačno male jedinice, onda možemo kazati da je gustina masa vazduha koja se nalazi u jedinici zapremine, a specifična zapremina zapremina koju zaprema jedinica mase vazduha.

3. <u>Iz teorije tenzorskog računa</u>

U toku našeg rada naićićemo na izvesne pojmove i izraze koji će se često ponavljati. Zbog preglednosti i jednostavnosti koristićemo se prostom matematičkom simbolikom za označavanje tih pojmova i izraza, kao i za naznačavanje raznih matematičkih operacija. Da bi bio naš zadatak u tom pogledu olakšan, dajemo ovde sva potrebna objašnjenja, tj. osnove iz tenzorskog računa.

Čitaocu nikako nije potrebno da odmah na početku čita i prati ova izvođenja. Neka ih čita prema potrebi u toku proučavanja pojedinih partija iz ovog udžbenika. Na ovaj način, tj. upoznavajući se sa zadacima i rešenjima iz dinamičke meteorologije, će da nađe potpun smisao ovakve simbolike. Ovde se smatra da su osnovni pojmovi iz vektorske algebre i analize poznati.

Makoji vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ gde su a_i $(i = 1, 2, 3)$ komponente vektora $\vec{a}$ u pravcu osa desnog ortogonalnog koordinatnog sistema, možemo simbolično da pišemo na sledeći način:

$$\vec{a} = a_i$$

Komponente vektora često se pišu i jedna ispod druge:

$$a_i = \begin{cases} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{cases}$$

Skalari i vektori zovu se i tenzori nultog odn. prvog reda. Veličina višeg reda je tenzor drugog reda. Takvu veličinu ćemo ovde nazivati kratko "tenzor", pošto ćemo tenzore nultog i prvog reda stalno nazivati skalarima odn. vektorima. Svaki tenzor

$$\mathcal{A} = a_{ik} = \begin{cases} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{cases}$$

ima devet skalarnih komponenata. One se mogu grupisati u tri <u>vektora redova</u> (<u>vektorske komponente tenzora</u>):

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}) \text{ i } (a_{31}, a_{32}, a_{33})$$

ili u tri vektora kolona:

$$(a_{11}, a_{21}, a_{31}), (a_{12}, a_{22}, a_{32}), (a_{13}, a_{23}, a_{33}).$$

Tenzor a_{ki} koji ima za vektore redova vektore kolona tenzora a_{ik} napisane istim redom zove se konjugovani tenzor. Dakle je

$$\mathcal{A}' = a_{ki} = \begin{Bmatrix} a_{11}, & a_{21}, & a_{31} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{32} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{Bmatrix}$$

Vidimo da je i tenzor a_{ik} konjugovan tenzoru a_{ki}. Konjugovanost tenzora je dakle recipročna.

Prema definiciji je zbir iz dva tenzora a_{ik} i b_{ik} definisan na sledeći način:

$$a_{ik} + b_{ik} = \begin{Bmatrix} a_{11} + b_{11}, & a_{12} + b_{12}, & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21}, & a_{22} + b_{22}, & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31}, & a_{32} + b_{32}, & a_{33} + b_{33} \end{Bmatrix}$$

Proizvod skalara sa tenzorom dobijamo na taj način da svaku komponentu tenzora množimo sa tim skalarom.

Tenzor kod koga je

$$a_{ki} = a_{ik}$$

zove se simetričan a kod koga je

$$a_{ki} = - a_{ik}$$

zove se antisimetričan. Vidimo da je simetričan tenzor jednak svom konjugovanom tenzoru, on je samokonjugovan. Antisimetričan tenzor jednak je svom konjugovanom tenzoru, množenim sa - 1. Svaki tenzor možemo pisati u vidu zbira iz jednog simetričnog i antisimetričnog tenzora. Ovo vidimo na sledeći način:

Sabiranjem makog tenzora sa njegovim konjugovanim tenzorom dobijamo simetričan tenzor

$$a_{ik} + a_{ki} = \begin{Bmatrix} a_{11} + a_{11}, & a_{12} + a_{21}, & a_{13} + a_{31} \\ a_{21} + a_{12}, & a_{22} + a_{22}, & a_{23} + a_{32} \\ a_{31} + a_{13}, & a_{32} + a_{23}, & a_{33} + a_{33} \end{Bmatrix}$$

Oduzimanjem ista dva tenzora dobijamo antisimetričan tenzor

$$a_{ik} - a_{ki} = \begin{Bmatrix} 0, & a_{12} - a_{21}, & a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12}, & 0, & a_{23} - a_{32} \\ a_{31} - a_{13}, & a_{32} - a_{23}, & 0 \end{Bmatrix}$$

Ako saberemo dobivena dva nova tenzora i dobiveni tenzor delimo sa dva, dobijamo odmah tenzor a_{ik} kao zbir iz jednog simetričnog i jednog antisimetričnog tenzora:

$$a_{ik} = \frac{1}{2}(a_{ik} + a_{ki}) + \frac{1}{2}(a_{ik} - a_{ki})$$

Skalarni (unutrašnji) proizvod vektora a_i i b_i je

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Indeks i u simbolu $a_i b_i$ pojavljuje se dva puta. Kada se u simbolima koji su napisani u vidu proizvoda neki indeks pojavljuje dva puta, onda u smislu Einstein-ove simbolike ovakav simbol znači zbir takvih proizvoda sa toliko sumanada koliko iznosi najveća moguća vrednost indeksa i (u našem slučaju 3). Vidimo da zbog toga možemo mesto indeksa "i" da stavimo makoji drugi indeks koji se kreće u jednakim granicama kao indeks i. Ovakva zamena ništa ne utiče na rezultat i indeks koji se u simbolu ovakve vrste pojavljuje zove se <u>nemi</u>.

Skalarni proizvod tenzora a_{ik} sa vektorom x_i kao postfaktorom je vektor

$$\mathcal{A}\cdot\vec{x} = a_{ik}x_k = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

Taj proizvod nije komutativan, pošto je prema definiciji skalarni proizvod tenzora sa vektorom kao prefaktorom sledeći vektor

$$\vec{x}\cdot\mathcal{A} = x_i a_{ik} = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

Ako se setimo na definiciju konjugovanog tenzora, onda vidimo da je

$$\mathcal{A}\cdot\vec{x} = \vec{x}\cdot\mathcal{A}' \qquad \text{i} \qquad \mathcal{A}'\cdot\vec{x} = \vec{x}\cdot\mathcal{A}$$

Vektorski (spoljašnji) proizvod vektora a_i i b_i je

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i}, & \vec{j}, & \vec{k} \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix} = \begin{cases} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{cases} = a_{ik} b_k$$

gde je a_{ik} očigledno sledeći antisimetrični tenzor:

$$a_{ik} = \begin{cases} 0, & -a_3, & a_2 \\ a_3, & 0, & -a_1 \\ -a_2, & a_1, & 0 \end{cases} = -a_{ki}$$

Sistemu običnih linearnih jednačina

$$\begin{cases} \xi_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \xi_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \xi_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

ili simbolično pisano

$$\xi_i = a_{ij}x_j$$

pripada tenzor a_{ij}. Vektor ξ_i zove se <u>linearna vektorska funkcija</u> vektora x_j. Ako je i x_j linearna vektorska funkcija, napr. vektora u_k tako da je

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3 \\ x_2 = \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{23}u_3 \\ x_3 = \alpha_{31}u_1 + \alpha_{32}u_2 + \alpha_{33}u_3 \end{cases}$$

ili simbolično pisano

$$x_j = \alpha_{jk}u_k = u_j\alpha_{kj}$$

onda je

$$\begin{cases} \xi_1 = b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3 \\ \xi_2 = b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3 \\ \xi_3 = b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + b_{33}u_3 \end{cases}$$

gde su

$$b_{11} = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{21} + a_{13}\alpha_{31}$$
$$b_{12} = a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22} + a_{13}\alpha_{32}$$
$$b_{13} = a_{11}\alpha_{13} + a_{12}\alpha_{23} + a_{13}\alpha_{33}$$
$$b_{21} = a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} + a_{23}\alpha_{31}$$
$$\vdots$$

Odavde vidimo da možemo opšti član b_{ik} odn. b_{ki} pisati u obliku

$$b_{ik} = a_{ij}\alpha_{jk} \quad \text{odn.} \quad b_{ki} = a_{kj}\alpha_{ji}$$

Tenzori b_{ik} i b_{ki} pretstavljaju <u>proizvod tenzora</u> a_{ij} sa tenzorom α_{jk} odn. proizvod tenzora a_{kj} sa tenzorom α_{ji}. U opštem slučaju je

$$b_{ik} \neq b_{ki}$$

Ako je determinanta koeficienata $a = |a_{ij}|$ gornjeg sistema jednačina različita od nule, onda ovaj sistem jednačina možemo rešiti po x_i, tako da je

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}'\xi_1 + a_{12}'\xi_2 + a_{13}'\xi_3 \\ x_2 = a_{21}'\xi_1 + a_{22}'\xi_2 + a_{23}'\xi_3 \\ x_3 = a_{31}'\xi_1 + a_{32}'\xi_2 + a_{33}'\xi_3 \end{cases}$$

ili simbolično pisano

$$x_i = a_{ij}'\xi_j = \xi_i a_{ji}'$$

Tenzor a_{ij}' koji možemo simbolično pisati u obliku $(a_{ij})^{-1}$ zove se <u>recipročni tenzor</u> tenzoru a_{ij}. Slično je tenzor

$$a_{ji}' = (a_{ji})^{-1}$$

recipročan tenzoru a_{ji}. Nije se teško uveriti da je

$$a_{ij}\,(a_{ij})^{-1} = a_{ji}\,(a_{ji})^{-1} = \begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix} = \mathcal{E}$$

Ovaj tenzor zove se <u>jedinični tenzor</u>.

Tenzor specijalne vrste je dijada. Nju definišu svega dva vektora. Pomoću vektora c_i i d_i su definisane dve i samo dve dijade:

$$\vec{c}\vec{d} = c_i d_k = \begin{cases} c_1d_1, & c_1d_2, & c_1d_3 \\ c_2d_1, & c_2d_2, & c_2d_3 \\ c_3d_1, & c_3d_2, & c_3d_3 \end{cases} \qquad \vec{d}\vec{c} = d_i c_k = \begin{cases} d_1c_1, & d_1c_2, & d_1c_3 \\ d_2c_1, & d_2c_2, & d_2c_3 \\ d_3c_1, & d_3c_2, & d_3c_3 \end{cases}$$

(između vektora $\vec{c}$ i $\vec{d}$ ne stoji nikakav znak). Vidimo da u opštem slučaju $c_i d_k \neq d_i c_k$.

U vektorskoj analizi od vrlo je velikog značaja simbolični vektor

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}) = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

koji se zove nabla (∇) ili del.

Ako sa ovim vektorom (simbolično) množimo na isti način kao sa svakim drugim vektorom, dobijamo sledeće izraze i važne veličine:

1. Vektor

$$\nabla\alpha = (\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}, \frac{\partial\alpha}{\partial x_2}, \frac{\partial\alpha}{\partial x_3}) = \frac{\partial\alpha}{\partial x_i}$$

zove se ascendent skalarne veličine α. Vektor $-\nabla\alpha$ zove se gradijent veličine α. Često se piše

$$-\nabla\alpha = \mathrm{grad}\,\alpha$$

2. Izraz

$$\nabla\cdot\vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \mathrm{div}\,\vec{a}$$

zove se divergencija vektora a_i.

3. Vektor

$$\nabla \times \vec{a} = (\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}) = \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_k}$$

gde je a_{ki} gore (kod vektorskog proizvoda) napisani antisimetričan tenzor, zove se rotor ili curl vektora $\vec{a}$:

$$\nabla \times \vec{a} = \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_k} = \mathrm{rot}\,\vec{a} = \mathrm{curl}\,\vec{a}$$

4. Vektor

$$\mathrm{div}\,\mathcal{A} = \nabla\cdot\mathcal{A}' = \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{33}}{\partial x_3} \end{cases}$$

zove se divergencija tenzora $\mathcal{A} = a_{ik}$ (ne tenzora $\mathcal{A}' = a_{ki}$). Za razliku od toga je

$$\operatorname{div}\mathcal{A}' = \nabla\cdot\mathcal{A} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{31}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{32}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{33}}{\partial x_3} \end{cases}$$

5. Ako u drugoj gore navedenoj dijadi mesto $\vec{d}$ i $\vec{c}$ pišemo ∇ odn. $\vec{a}$ dobijamo tenzor

$$\nabla\vec{a} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial x_1}, \frac{\partial a_2}{\partial x_1}, \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2}, \frac{\partial a_2}{\partial x_2}, \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3}, \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{cases}$$

6. Dve važne vektorske funkcije za tumačenje osobina vektorskog polja su sledeće dve

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial A_1}{\partial x_3} x_3 \\ a_2 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial A_2}{\partial x_3} x_3 \\ a_3 = \frac{\partial A_3}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial A_3}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} x_3 \end{cases}$$

i

$$\begin{cases} a_1' = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial A_3}{\partial x_1} x_3 \\ a_2' = \frac{\partial A_1}{\partial x_2} x_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial A_3}{\partial x_2} x_3 \\ a_3' = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} x_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_3} x_2 + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} x_3 \end{cases}$$

Simbolično pišemo prvi sistem jednačina na sledeći način:

$$a_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} x_k \qquad \text{ili} \qquad \vec{a} = \vec{x}\cdot\nabla\vec{A}$$

Slično glasi kraće napisani drugi sistem jednačina

$$a_i' = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} x_k \qquad \text{ili} \qquad \vec{a}' = \nabla\vec{A}\cdot\vec{x}$$

Kao kod tenzora kažemo i ovde da je drugi sistem jednačina konjugovan prvome i obratno.

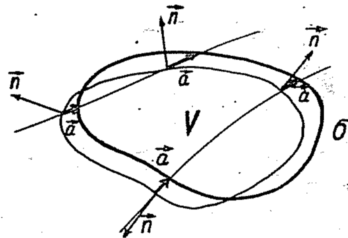
Način pisanja vektora i tenzora pomoću indeksa koji označavaju komponente ovih veličina zove se tenzorski način pisanja.

U termodinamci i teorijskoj hidrodinamici ima veliku primenu Gauss-ov stav, prema kome u kontinuarnom vektorskom polju makog

vektora $\vec{a}$ važi identitet

$$\int_{\sigma} \vec{a}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \int_{V} \nabla\cdot\vec{a}\, dV$$

Integral na desnoj strani odnosi se na deo polja zapremine V koja je ograničena od površine σ na koju se odnosi integral na levoj strani (sl. 1). Vektor $\vec{n}$ je vektor spoljašnje normale na elemenat površine $d\sigma$ (= jedinični vektor koji stoji normalno na površinu $d\sigma$ i usmeren je iz prostora V upolje).



Sl. 1
Divergencija i Gauss-ov stav

4. Skalarna polja

Atmosfera se nalazi u polju zemljine teže, tj. u oblasti gde svuda na vazduh deluje sila zemljine teže. Na makom mestu u atmosferi vazduh ima neki pritisak, neku temperaturu, gustinu itd. Atmosfera se nalazi zbog toga u polju raznih skalarnih veličina. Govorimo o skalarnom polju pritiska, temperature, gustine i drugih fizičkih veličina. Skalarno polje pritiska zove se i barsko polje.

Zamislo sada da je u atmosferi neka skalarna veličina, napr. pritisak, kontinuarno raspoređena, da je drugim rečima gdegod u atmosferi razlika između dve vrednosti veličine α sa dve beskonačno malo udaljene tačke beskonačno mala. Veličina α se svakako može menjati i u toku vremena. Ako je i to slučaj, onda je α kontinuarna funkcija prostornih koordinata x_1, x_2, x_3 i vremena t:

(1) $$\alpha = \alpha(x_1, x_2, x_3, t)$$

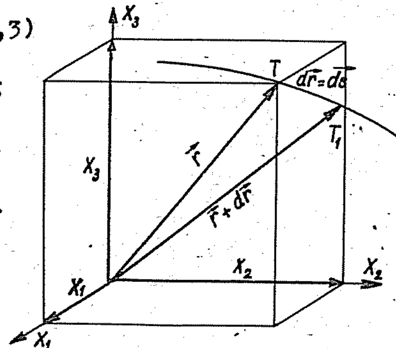
Ovde mislimo na koordinate desnog ortogonalnog (Dekart-ovog) koordinatnog sistema u kome svakoj tački polja pripada vektor položaja

(2) $$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) = x_i \quad (i = 1,2,3)$$

koji je po intenzitetu jednak otstojanju tačke T od početka koordinatnog sistema O, a usmeren je od tačke O ka tački T (sl. 2).

Zamislimo sada da, idući putem s, od početne tačke T (s = dužina puta koja se meri od tačke T) dođemo u intervalu vremena dt u obližnju tačku $T_1(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$. Za to vreme došlo je na tom putu, tj. na elementu puta $\vec{ds} = \vec{dr} = dx_i$ (sl. 2) do sledeće promene veličine α:

(3) $$d\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial t}dt + \frac{\partial\alpha}{\partial x_k}dx_k$$



Sl. 2
Vektor položaja i elemenat puta

Ta promena sastoji sa iz dva dela, iz promene

(4) $$d_1\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial t}dt$$

i promene

(5) $$d_2\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x_k} dx_k = \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} dx_3$$

Prva se zove lokalna a druga geometrijska promena. Jednu i drugu možemo jednostavno tumačiti:

Promena $d_1\alpha$ izazvana je opštom promenom veličine α u toku vremena u oblasti tačke T i nezavisna je, ako mislimo na srazmerno malu oblast, od toga gde se obližnja tačka T_1 nalazi. Ona je dakle nezavisna od pravca koji nas je vodio u okolinu tačke T. Ako uzmemo da je $dt = 1$ (infenitezimalno mala merna jedinica), onda vidimo da je $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ promena veličine α do koje u makojoj fiksnoj tačci infinitezimalno male oblasti tačke T u jedinici vremena t dođe.

Promena $d_2\alpha$ zavisi samo od izabranog puta i odnosi se na jedan i to makoji trenutak vremena u posmatranom infenitezimalnom intervalu vremena dt. Ona nam pretstavlja razliku između vrednosti veličine α u tačci T_1 i u tačci T u ovakvom jednom trenutku vremena. Kad ovo uzmemo u obzir, vidimo da pod

(6) $$\frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_k} \frac{dx_k}{ds} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_k} \cos(s, x_k)$$

((s, x_k) = ugao između koordinate x_k i pravca puta s u tačci T) treba podrazumevati razliku koja u trenutku vremena t postoji između vrednosti veličine α u tačci koja je u pravcu puta s za jedinicu udaljena od tačke T i vrednosti te veličine u tačci T.

Promena $d_2\alpha$ jednaka je skalarnom proizvodu ascendenta

(7) $$\nabla\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_3}\right)$$

i elementa vektora položaja

(8) $$d\vec{r} = dx_i = (dx_1, dx_2, dx_3)$$

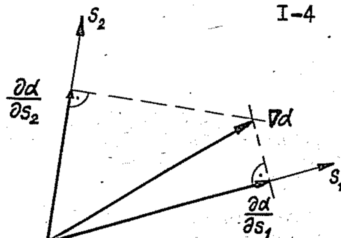
Ascendent (gradijent) je vektor koji ima u meteorologiji veliku primenu. Njegove glavne osobine su sledeće:

1. Ascendent stoji normalno na ekviskalarne površine, tj. na površine na kojima je u datom trenutku vremena α konstantno. Ovo vidimo iz jedn. (5), ako smatramo da vektor $d\vec{r}$ leži na ekviskalarnoj površini. U tom slučaju je $d\alpha = 0$ a time je skalarni proizvod vektora $\nabla\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x_k}$ i $d\vec{r}$ jednak nuli, što znači da ascendent $\nabla\alpha$ stoji normalno na vektoru $d\vec{r}$, tj. na ekviskalarnoj površini.

2. Komponenta ascendenta u pravcu s jednaka je izvodu veličine α u tom pravcu na jedinicu otstojanja. Ovo vidimo neposredno iz jedn. (6).

3. Ascendent $\nabla\alpha$ usmeren je u pravcu i smislu najbržeg povećavanja veličine α a po intenzitetu je jednak promeni te veličine na jedinicu otstojanja u tom pravcu. Ovo vidimo iz jedn. (6), kad uzmemo u obzir da je promena $\frac{\partial \alpha}{\partial s}$ najveća kada je jedinični vektor $\frac{dx_k}{ds}$ usmeren u pravcu ascendenta $\frac{\partial \alpha}{\partial x_k}$ i da je svaka komponenta $\frac{\partial \alpha}{\partial x_k}$ pozitivna kada je x_k usmereno u pravcu povećavanja vrednosti α.

4. Ako su poznate komponente $\frac{\partial \alpha}{\partial s_1}$ i $\frac{\partial \alpha}{\partial s_2}$ ascendenta u pravcima



Sl. 3
Ascendent kao rezultanta dve komponente

s_1 i s_2, onda grafički nalazimo ascendent na način kao što je prikazan na slici3.

Skalarno polje možemo sebi lepo pretstaviti ekviskalarnim površinama na kojima je $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, na kojima je dakle α celi broj. Sve ove površine dele polje na jedinične lamele, tj. na slojeve kod kojih je na jednoj graničnoj površini α za jedinicu veće nego na drugoj. Ako je debljina jedne takve lamele D, onda je prema definiciji ascendenta

(9) $\qquad 1 = |\nabla\alpha| D \qquad$ ili $\qquad |\nabla\alpha| = \frac{1}{D}$.

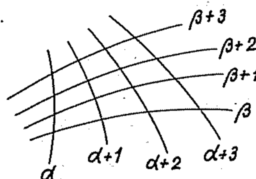
Što manje ima dakle u nekoj oblasti lamela (što veće je D), to manji je tamo ascendent veličine α. Ako je svuda u polju α = const., onda se između makoje dve tačke u polju ne nalazi nijedna lamela. U ovakvoj oblasti ascendent uopšte ne postoji.

Ascendent $\nabla\alpha$ je vektor specijalne vrste. On se zove potencijalni vektor. Funkcija α zove se potencijal tog vektora.

U atmosferi postoje razna skalarna polja. I skalarno polje neke druge skalarne veličine možemo sebi pretstaviti jediničnim lamelama, koje obično u toku vremena menjaju svoj položaj u prostoru i koje u opštem slučaju ne leže paralelno sa lamelama skalarne veličine α (sl. 4). Obično se dakle ekviskalarne površine veličine α seku sa ekviskalarnim površinama druge veličine, napr. β. U ovakvom opštem slučaju je sa skalarnim površinama

$\alpha = 0, 1, 2, \ldots$ i $\beta = 0, 1, 2, \ldots$

polje razdeljeno na same cevi, na jedinične cevi ili solenoide (α, β) sa presecima u vidu paralelograma (sl.4).



Sl. 4
Solenoidi skalarnih polja α i β

Kada je α neka funkcija veličine β, tako da je

(10) $\qquad F(\alpha, \beta) = 0$

tada je na svakoj ekviskalarnoj površini polja veličine α i β konstantno. Tada su ekviskalarne površine jedne veličine paralelne sa ekviskalarnim površinama druge veličine. U ovakvom slučaju kažemo, prema V. Bjerknes-u, da su veličine α i β jedna u odnosu na drugu homotropne (slično raspoređene) i odnos (10) zove se uslov homotropije. Inače govorimo da su dve veličine jedna u odnosu na drugu heterotropne (različito raspoređene). Specijalno govorimo, ako β znači pritisak p i ako je ispunjen uslov (10) da je polje skalarne veličine α barotropno. Kada taj uslov nije ispunjen govorimo o baroklinom polju.

Ako u barotropnom polju α znači gustinu ρ, onda se količnik

(11) $$\Gamma = \frac{\partial \varrho}{\partial p} = -\frac{\partial F}{\partial p}:\frac{\partial F}{\partial \varrho}$$

zove barotropski koeficijent. Pošto je $\alpha\varrho = 1$ (α = specifična zapremina vazduha), to mesto jedn. (11) možemo pisati i

(12) $$\Gamma = -\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial p}$$

Barotropski koeficijenat pretstavlja očigledno geometrijsku promenu gustine ϱ u pravcu porasta pritiska na otstojanju na kome se pritisak poveća za jedinicu. Ako se u pravcu s na jedinicu otstojanja gustina i pritisak promene za $\frac{\partial \varrho}{\partial s}$ odn. $\frac{\partial p}{\partial s}$, onda je očigledno

$$\Gamma = \frac{\partial \varrho}{\partial s}:\frac{\partial p}{\partial s}$$

Solenoidi koji potiču od polja pritiska i polja specifične zapremine zovu se izobarno izosterski solenoidi.

5. Vektorska polja

Slično kao o skalarnim govorimo i o vektorskim poljima. Razna gradijentna polja, polje zemljine teže, strujno polje su vektorska polja. Strujno polje, tj. vektorsko polje brzine, možemo sebi lepo da pretstavimo strujnicama (strujnim linijama), jer one svuda leže u pravcu vektora brzine. Gradijentno polje možemo sebi pretstaviti i na drugi način, tj. jediničnim lamelama. Gradijent je svuda normalan na te površine i po intenzitetu obrnuto je srazmeran debljini jediničnih lamela.

Vektorsko polje obično sebi pretstavljamo vektorskim linijama, tj. linijama koje leže u pravcu vektora. U izvesnim slučajevima je gustina vektorskih linija (= broj linija kroz jedinicu površine koja stoji normalno na te linije) srazmerna intenzitetu vektora na onom mestu. To je napr. slučaj kod strujnica nestišljive tečnosti.

Posmatrajmo sada u makom kontinuarnom vektorskom polju vektora A_i, gde postoje i prvi izvodi ovog vektora u pravcu koordinata, njegovo ponašanje u nekom trenutku vremena t u srazmerno maloj oblasti neke, proizvoljno izabrane, tačke O. Zamislimo da se centar desnog ortogonalnog sistema x_i nalazi u tačci O. Razvijanjem funkcije

(1) $$A_i = A_i(x_i, t)$$

u Taylor-ov red, smatrajući da je t konstantno, i zadržavajući samo linearni član reda, dobijamo

(2) $$\begin{cases} a_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

ili kraće napisano

(2') $$a_i = a_{ik}x_k$$

Zbog jednostavnosti upotrebili smo sledeće oznake

(3) $$a_i = A_i - A_{io} \quad \text{i} \quad a_{ik} = \left.\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right|_o$$

($A_{io} = A_i$ u tački O (o,o,o), $\left.\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right|_o$ = parcijalni izvod i-te komponente vektora A_i u pravcu x_k u tački O (o,o,o)).

Vidimo da ponašanje vektora u srazmerno maloj oblasti oko tačke O određuje tenzor

(4) $$a_{ik} = \begin{Bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left.\frac{\partial A_1}{\partial x_1}\right|_o, & \left.\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right|_o, & \left.\frac{\partial A_1}{\partial x_3}\right|_o \\ \left.\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right|_o, & \left.\frac{\partial A_2}{\partial x_2}\right|_o, & \left.\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right|_o \\ \left.\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right|_o, & \left.\frac{\partial A_3}{\partial x_2}\right|_o, & \left.\frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right|_o \end{Bmatrix}$$

Pošto možemo početak koordinatnog sistema postaviti u makoju tačku polja, to vidimo da je za svaku tačku polja definisan tenzor (4), koji se u opštem slučaju od tačke do tačke menja. U specijalnom slučaju kada su sve komponente tenzora (4) konstantne, bez obzira na izbor početne tačke kordinatnog sistema x_i, govorimo o linearnom vektorskom polju. Aproksimacija svakog većeg ili manjeg dela makog vektorskog polja je uvek neko linearno vektorsko polje, ako, svakako, vertor ima jednake osobine kao vektor A.

Za dalje tumačenje kako se ponaša vektorsko polje u oblasti tačke O, vrlo je korisno da napišemo tenzor (4) u vidu zbira iz jednog simetričnog i antisimetričnog tenzora:

(5) $$a_{ik} = \frac{1}{2}(a_{ik} + a_{ki}) + \frac{1}{2}(a_{ik} - a_{ki})$$

To nam omogućuje da sistem jednačina (2) možemo pisati i u obliku

(6) $$\begin{aligned} a_1 &= a_{11}x_1 + \tfrac{1}{2}(a_{21}+a_{12})x_2 + \tfrac{1}{2}(a_{13}+a_{31})x_3 + \tfrac{1}{2}(a_{13}-a_{31})x_3 - \tfrac{1}{2}(a_{21}-a_{12})x_2 \\ a_2 &= \tfrac{1}{2}(a_{21}+a_{12})x_1 + a_{22}x_2 + \tfrac{1}{2}(a_{32}+a_{23})x_3 + \tfrac{1}{2}(a_{21}-a_{12})x_1 - \tfrac{1}{2}(a_{32}-a_{23})x_3 \\ a_3 &= \tfrac{1}{2}(a_{13}+a_{31})x_1 + \tfrac{1}{2}(a_{32}+a_{23})x_2 + a_{33}x_3 + \tfrac{1}{2}(a_{32}-a_{23})x_2 - \tfrac{1}{2}(a_{13}-a_{31})x_1 \end{aligned}$$

Ako definišemo skalarnu veličinu

(7) $$\varphi = \tfrac{1}{2}a_{11}x_1^2 + \tfrac{1}{2}a_{22}x_2^2 + \tfrac{1}{2}a_{33}x_3^2 + \tfrac{1}{2}(a_{32}+a_{23})x_2x_3 + \tfrac{1}{2}(a_{13}+a_{31})x_3x_1 + \tfrac{1}{2}(a_{21}+a_{12})x_1x_2$$

koja je, kao što se može pokazati, invarijantna prema orijentaciji kordinatnog sistema i vektor

(8) $$\vec{\omega} = \tfrac{1}{2}(a_{32} - a_{23}, \; a_{13} - a_{31}, \; a_{21} - a_{12})$$

onda vidimo da možemo taj sistem pisati i u obliku

(9) $$\vec{a} = \nabla\varphi + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Dobiveni rezultat ćemo tumačiti kasnije prilikom posmatranja kinematike strujnog polja.

Sistem jednačina (2) možemo tumačiti i neposredno:

Svaka tačka $T(x_i)$ koja leži na pravoj liniji koja ide kroz

tačku $T_o(x_{io})$ i koordinatni početak ima koordinate

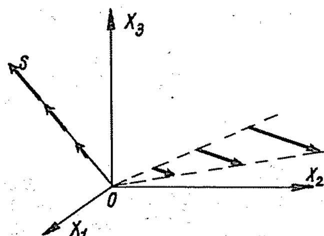
$$x_i = \frac{x_{io}}{r_o} r$$

gde r_o i r znače otstojanja tačke T_o odn. T od koordinatnog početka. Ako ovo uzmemo u jedn. (2) u obzir, vidimo da ima u svakoj tačci ovakvog pravca vektor a_i isti pravac i da se intenzitet tog vektora sa otstojanjem od koordinatnog početka linearno povećava. (sl. 5). Ako se pravac vektora a_i podudara sa pravcem u kome leži ovakva jedna prava linija, onda je ovakva linija i vektorska linija (pravac s na slici 5). Za nju važi očigledno

(10) $$a_i = \lambda x_i = a_{ik} x_k$$

(λ = faktor proporcionalnosti), što je moguće, a da nije $x_i = 0$, samo pod uslovom da je

(11) $$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$



Sl. 5
Linearno vektorsko polje

Ova jednačina ima tri korena $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i ako su oni realni i različiti, onda imamo tri vektorske linije koje idu kroz početak koordinatnog sistema u raznim pravcima i koje svakako ne treba da stoje normalno jedna na drugoj. U tom slučaju ima vektor a_i u makojoj tačci koja leži na jednoj od ovih pravih vektorskih linija komponente $\lambda_1 x_1$, $\lambda_1 x_2$ i $\lambda_1 x_3$ gde su x_1, x_2 i x_3 koordinate te tačke. Slično ima vektor a_i koji leži na drugoj ili trećoj od ovih linija komponente $\lambda_2 x_1$, $\lambda_2 x_2$ i $\lambda_2 x_3$ odn. $\lambda_3 x_1$, $\lambda_3 x_2$ i $\lambda_3 x_3$. Lako se možemo uveriti da u koordinatnom sistemu u kome ose leže u pravcu ovih vektorskih linija mesto sistema jednačina (2) važi sistem

(12) $$\begin{aligned} a_1 &= \lambda_1 x_1 \\ a_2 &= \lambda_2 x_2 \\ a_3 &= \lambda_3 x_3 \end{aligned}$$

gde je

$$\lambda_1 = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \qquad \lambda_2 = \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \qquad \lambda_3 = \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$$

Vektorske linije svuda leže u pravcu vektora. Zbog toga je vektorski proizvod iz vektora $\vec{a}$ i elementa puta u pravcu vektorske linije $d\vec{r}$ jednak nuli:

$$\vec{a} \times d\vec{r} = 0$$

Odavde dobijamo u sistemu u kome važe jedn. (12) diferencijalne jednačine vektorske linije

(13) $$dx_1 : dx_2 : dx_3 = a_1 : a_2 : a_3 = \lambda_1 x_1 : \lambda_2 x_2 : \lambda_3 x_3$$

što nam integraljeno daje za vektorsku liniju koja ide kroz tačku x_{io} jednačine

(14) $$\left(\frac{x_1}{x_{10}}\right)^{1:\lambda_1} = \left(\frac{x_2}{x_{20}}\right)^{1:\lambda_2} = \left(\frac{x_3}{x_{30}}\right)^{1:\lambda_3}$$

Primenom operatora $\nabla\cdot$ i $\nabla\times$ na jedn. (2), kad uzmemo još u obzir jedn. (7), (8) i (9), dobijamo

(15) $$\nabla\cdot\vec{a} = \text{div}\,\vec{a} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{kk}$$
$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\,\partial x_k} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2}$$

(16) $$\nabla\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) = 0$$

(17) $$\nabla\times\vec{a} = \text{rot}\,\vec{a} = \text{curl}\,\vec{a} = \nabla\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = 2\vec{\omega}$$

i

(18) $$\nabla\times\nabla\varphi = 0$$

O opravdanosti izraza divergencija (div) i vrtloženje (rot, curl) upoznaćemo se kasnije. Operator ∇^2 koji se često piše i u obliku Δ zove se Laplace-ov operator ili kratko laplasijan.

II. OSNOVNE JEDNAČINE KINEMATIKE I DINAMIKE ATMOSFERE

1. Jednačina kontinuiteta i kinematički granični uslov

Činjenica da je u atmosferi masa neuništiva vodi nas do dve važne jednačine, do jednačine kontinuiteta i do kinematičkog graničnog uslova.

Jednačina kontinuiteta važi u onim oblastima atmosfere gde su gustina vazduha ϱ i vektor brzine $\vec{u} = (u, v, w)$ kontinuarne funkcije prostornih koordinata x, y, z i vremena t i gde postoje parcijalni izvodi ovih veličina u pravcu prostornih koordinata. Na graničnim površinama na kojima postoje u tom pogledu diskontinuiteti jednačinu kontinuiteta zamenjuju razni granični uslovi.

U atmosferi postoje razne granične površine, ona u termodinamičkom i dinamičkom pogledu nije jednoobrazna, već se sastoji iz pojedinih "vazdušnih masa" koje se jedna sa drugom graniče preko više ili manje oštro izraženih graničnih površina. S jedne strane površine su vrednosti jedne ili više veličina stanja za konačnu vrednost različite od vrednosti istih veličina sa druge strane.Strogo uzev ovakve diskontinuitetne površine u prirodi ne postoje, ustvari postoje razne prelazne zone konačne debljine u kojima se pojedine veličine srazmerno brzo menjaju. Ali, posmatrano "sa daleka" prikazuju nam se kao prave diskontinuitetne površine. Već prema tome da li se na graničnoj povrčini javlja skok bar u jednoj veličini stanja, uključujući pri tome i brzinu vetra, odn. u gradijentu bar jedne od ovih veličina govorimo o graničnim površinama nultog odn. prvog reda.

Granične površine nultog reda koje dele dve vazdušne mase različitih osobina, tj. unutrašnje granične površine, zovu se često i frontalne površine.Presek frontalne površine sa spoljašnjom granicom atmosfere, sa zemljinim tlem, zove se front.

Zamislimo prvo deo atmosfere gde su svuda ispunjeni uslovi za jednačinu kontinuiteta. Zapremina V ovakvog dela atmosfere neka bude ograničena od nepokretne površine σ. U jedinici vremena u taj prostor očigledno ulazi masa vazduha

$$\frac{dM}{dt} = -\int_{\sigma} \varrho\vec{u}\cdot\vec{n}\, d\sigma = -\int_{V} \nabla\cdot(\varrho\vec{u})\, dV$$

($\vec{n}$ = jedinični vektor koji stoji normalno na element $d\sigma$ granične površine σ i usmeren je upolje). Ovde smo odmah primenili Gaussov identitet. Zbog transporta $\frac{dM}{dt}$ vazduha preko granične površine promeni se jednovremeno u saglasnosti sa zakonom o neuništivosti materije u jednakom iznosu masa vazduha u prostoru V. Pošto je ova promena očigledno

$$\int_V \frac{\partial\varrho}{\partial t}\, dV \qquad \text{to je} \qquad -\int_V \nabla\cdot(\varrho\vec{u})\, dV = \int_V \frac{\partial\varrho}{\partial t}\, dV$$

Ova jednačina važi za makakvu zapreminu pod gornjim uslovima.Zbog toga je svuda u prostoru V ispunjena i jednačina

$$\nabla\cdot(\varrho\vec{u}) = -\frac{\partial\varrho}{\partial t} \tag{1}$$

To je jednačina kontinuiteta koju možemo pisati i u obliku

(2) $$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Treba napomenuti da u ovim jednačinama gustina ρ znači masu vazduha zajedno sa svim suspendovanim česticama koje se u jedinici zapremine nalaze.

Prema jednačini kontinuiteta je promena mase vazduha zajedno sa masom ostale materije koja se u jedinici zapremine nalazi jednaka razlici između jednovremenog dovođenja i odvođenja mase preko granične površine tog prostora.

Vektor $\rho\vec{u}$ zove se impuls struje, on pretstavlja vektor specifične količine kretanja. Vidimo da je divergencija impulsa struje brojno jednaka smanjenju gustine ρ u jedinici vremena. Pozitivna divergencija znači odlaženje materije sa posmatrane oblasti a negativna prilaženje. Divergencija pretstavlja pored toga i jačinu ovog transporta materije koji se u jedinici vremena kroz graničnu površinu jedinice zapremine izvrši. Ona se zove i divergencija mase.

Pošto je

(3) $$\nabla\cdot(\rho\,\vec{u}) = \rho\nabla\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\nabla\rho \quad \text{i} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\rho = \frac{d\rho}{dt}$$

to možemo jednačinu kontinuiteta pisati i u obliku

(4) $$\nabla\cdot\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \qquad \left(\nabla\cdot\vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{u}\right)$$

Divergencija vektora brzine je dakle jednaka relativnom individualnom smanjenju gustine.

Kod nestišljivih (inkompresibilnih) tečnosti ($\frac{d\rho}{dt} = 0$) je divergencija vektora brzine jednaka nuli. Divergencija impulsa struje jednaka je nuli tada kada se gustina u makojoj tački u toku vremena ne menja.

Ako uzmemo u obzir da je $\alpha\rho = 1$ i zbog toga

$$-\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\alpha}{\alpha}$$

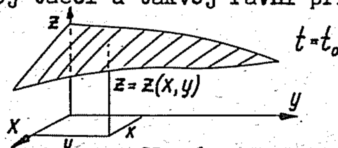
vidimo da možemo jednačinu kontinuiteta pisati i u obliku

(5) $$\nabla\cdot\vec{u} = \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt} \qquad \left(\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\alpha\right)$$

Primedba. Kod izvođenja jednačine kontinuiteta bilo je svejedno da li vazduh sa Zemljom rotira ili ne.

Sada nas interesuje jednačina koja na graničnoj površini nultog reda zamenjuje jednačinu kontinuiteta.

Zamislimo u atmosferi neku graničnu površinu. Ako x i y ose leže u horizontalnoj ravni, onda svakoj tački u takvoj ravni pripada jedna i samo jedna koordinata z koja pretstavlja vertikalno otstojanje granične površine od te horizontalne ravni (sl. 6). Vidimo da je z, kao koordinata makoje tačke na graničnoj površini, neka funkcija koordinata x i y. Vertikalno otstojanje granične površine se obično ne menja



Sl. 6
Unutrašnja granična površina u atmosferi

samo u pravcu koordinata x i y već i u toku vremena t, tako da je koordinata z svake tačke na graničnoj površini u opštem slučaju neka funkcija nezavisnih promenljivih x, y, t, dakle

$$z = z(x, y, t)$$

Ovo nam pretstavlja jednačinu granične površine u eksplicitnom obliku. Ako prebacimo fukciju z (x, y, t) sa desne na levu stranu, onda imamo na levoj strani neku funkciju f koordinata x, y, z i vremena t, tako da jednačinu granične površine možemo da pišemo i u implicitnom obliku

$$f(x, y, z, t) = 0 \tag{6}$$

Neposredno ispred i neposredno iza granične površine jednačina kontinuiteta je ispunjena. Na samoj površini bi ovu jednačinu očigledno zamenio uslov da se vazduh s jedne strane kreće jednakom brzinom kojom vazduh s druge strane površine odmiče.

U trenutku vremena $t = t_o$ neka budu koordinate nekog, inače makog delića na graničnoj površini (6) x_o, y_o, z_o. Malo kasnije u vremenu $t = t_o + (t - t_o)$ neka budu koordinate neke obližnje tačke na graničnoj površini (6) x, y, z. Pod uslovom da je $t - t_o$ srazmerno malo, možemo sa dovoljnom tačnošću da pišemo

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = - D(t - t_o) \tag{7}$$

gde su

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \quad B = \frac{\partial f}{\partial y} \quad C = \frac{\partial f}{\partial z} \quad D = \frac{\partial f}{\partial t} \tag{8}$$

parcijalni izvodi koji se odnose na trenutak vremena t_o.

Dobivena jednačina je jednačina ravni i to tangencijalne, koja površinu (6) u vremenu t_o tangira u tačci (x_o, y_o, z_o). Napisana u normalnom obliku ova jednačina glasi

$$\frac{A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = - \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(t-t_o) \tag{9}$$

Svaka strana znači otstojanje ravni (7) od tačke(x_o, y_o, z_o). Kad pogledamo desnu stranu, onda vidimo da je ovo otstojanje srazmerno vremenu $t - t_o$, tako da nam veličina

$$u_n = - \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{10}$$

znači brzinu kojom se ravan (7), a time i površina (6), udaljuje od tačke (x_o, y_o, z_o) u normalnom pravcu na istu. Za lim $(t - t_o) = 0$ dobijamo iz jedn. (8), (9) i (10)

$$u_n = - \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}}{\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2}} \tag{11}$$

Posmatrana granična površina pomera se zajedno sa vazduhom, tako da pod $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ treba da podrazumevamo komponente vektora

brzine $\vec{u}$ vazduha koji se nalazi s jedne strane neposredno ispred granične površine. Prema tome je

(12) $$u_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \cdot \vec{u} = -\frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial t}$$

Možemo napomenuti da u dobivenoj jednačini $\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ očigledno znači jedinični vektor - ort u pravcu normale na graničnu površinu, ∇f pretstavlja naime ascendent skalarne veličine f koji stoji normalno na ekviskalarnu površinu f = 0, tj. na graničnu površinu (6). Vidimo da smo izjednačenjem totalnog diferencijala funkcije f sa nulom mogli i neposredno doći do rezultata (12).

Potpuno slična jednačina kao za vazduh s jedne strane površine važi i za vazduh koji leži neposredno s druge strane površine. Ako koordinate vazdušnih delića s druge strane površine označimo sa crticom, onda možemo jednačinu granične površine za taj vazduh pisati u obliku

(13) $$f(x', y', z', t) = 0$$

Mesto jed. (12) važi za taj vazduh jednačina

(14) $$u_n' = \frac{\nabla' f'}{|\nabla' f'|} \cdot \vec{u}' = -\frac{1}{|\nabla f'|}\frac{\partial f'}{\partial t}$$

Jednačine (6) i (14) su ispunjene samo na posmatranoj graničnoj površini. Granična površina je ustvari samo jedna od ekviskalarnih površina skalarne veličine f i samo jedna od ekviskalarnih površina skalarne veličine f'. Ako pretpostavimo da se u oblasti gde leži granična površina veličina f u istom pravcu povećava u kome se povećava i veličina f', onda je na samoj graničnoj površini očigledno

(15) $$\frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\nabla f'}{|\nabla f'|} \qquad \text{za } \vec{r} = \vec{r}'$$

Jedinični vektori $\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ i $\frac{\nabla f'}{|\nabla f'|}$ su dakle usmereni na istu stranu granične površine.

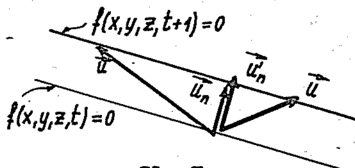
Pošto se vazduh neposredno ispred i neposredno iza granične površine kreće jednakom brzinom normalno na površinu, to je

(16) $$u_n = u_n'$$

što nam daje uz primenu jednačina (12), (14) i (15) kinematički granični uslov

(17) $$(\vec{u} - \vec{u}')\cdot\nabla f(x,y,z,t) = 0$$
$$(\vec{u} - \vec{u}')\cdot \nabla f'(x',y',z',t) = 0 \qquad \text{za } \vec{r} = \vec{r}'$$

Jednačina (17) ne kaže samo to da se vazduh koji leži neposredno ispred granične površine kreće normalno na površinu jednakom brzinom kao vazduh neposredno iza nje, već i to da je razlika između vektora brzine vazduha koji se nalazi neposredno ispred i iza granične površine paralelna graničnoj površini (sl. 7).



Sl. 7
Strujanje vazduha ispred i iza granične površine

2. Osnovne jednačine kinematike trodimenzionalnog strujnog polja

U polju strujanja vazduha u atmosferi vektor brzine je funkcija koordinata i vremena. Postavlja se pitanje da li se možemo, poznavajući ovu funkciju, upoznati sa raznim osobinama strujnog polja, da vidimo napr. gde vazduh rotira, gde mu se zapremina menja itd. Ovakvim pitanjima bavi se kinematika atmosfere, koja ima za zadatak da opiše razne vrste strujnog polja bez obzira na sile koje su sa strujanjem vazduha u vezi.

U saglasnosti sa jedn. I 5: (9), (3) vektor brzine $\vec{u}$ u blizini nakoje tačke O u polju jednak je zbiru tri parcijalne brzine

(1) $$\vec{u} = \vec{u}_o + \vec{u}' + \vec{u}''$$

gde je $\vec{u}_o$ vektor brzine u tačci O a

(2) $$\vec{u}' = \nabla\varphi \quad \text{i} \quad \vec{u}'' = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Skalarna veličina φ i vektor $\vec{\omega}$ definisani su na sledeći način (I 5:(7) i (8))

(3) $$2\varphi = \frac{\partial u}{\partial x} x^2 + \frac{\partial v}{\partial y} y^2 + \frac{\partial w}{\partial z} z^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)yz + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)zx + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)xy$$

(4) $$2\vec{\omega} = \text{rot}\, \vec{u} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

(vrednosti parcijalnih izvoda odnose se na tačku O(0,0,0)).

Vidimo da možemo polje strujanja u srazmerno maloj oblasti svake tačke smatrati kao superpoziciju tri parcijalna polja: <u>polja translacije</u> ($\vec{u}_o$), <u>simetričnog potencijalnog polja</u> ($\vec{u}'$) i <u>antisimetričnog polja</u> ($\vec{u}''$) sa <u>parcijalnim brzinama</u> $\vec{u}_o$, $\vec{u}'$ i $\vec{u}''$.

U parcijalnom polju translacije vektor brzine svuda je jednak. U parcijalnom potencijalnom polju vektor brzine $\vec{u}'$ u svakoj tačci jednak je ascendentu $\nabla\varphi$ potencijala φ koji se zove potencijal ove parcijalne brzine. Pošto strujnice leže u pravcu vektora brzine, tj. u slučaju polja parcijalne brzine $\vec{u}'$ u pravcu ascendenta $\nabla\varphi$, to strujnice parcijalnog polja $\vec{u}'$ stoje normalno na ekvipotencijalne površine φ = 0, 1, 2, 3,. koje su drugog reda. Tri glavne ose tih površina su pravolinijske strujnice i zovu se <u>glavne ose istezanja</u> ili <u>glavne ose deformacije polja</u>. Odgovarajući koeficijenti tog parcijalnog polja λ_1', λ_2' i λ_3' (jedn. I 5 (12)) zovu se <u>glavni koeficijenti istezanja</u>. Ako se glavne ose istezanja podudaraju sa osama našeg koordinatnog sistema x, y, z, onda je u saglasnosti sa jedn. I 5 (12)

(5) $$u' = \lambda_1' x \qquad v' = \lambda_2' y \qquad w' = \lambda_3' z$$

i

(6) $$2\varphi = \lambda_1' x^2 + \lambda_2' y^2 + \lambda_3' z^2$$

gde je

(7) $$\lambda_1' = \frac{\partial u'}{\partial x} \qquad \lambda_2' = \frac{\partial v'}{\partial y} \qquad \lambda_3' = \frac{\partial w'}{\partial z}$$

Svaki od ovih koeficijenata znači promenu komponente brzine $\vec{u}'$ u pravcu iste komponente. Ukoliko je λ_k' pozitivno, postoji u ovom pravcu rastezanje, ukoliko je negativno stezanje tečnosti. Što veći su po apsolutnom iznosu λ_k', to veće su i deformacije delića tečnosti u ovim pravcima.

Prema jednačini kontinuiteta je

(8) $$\nabla\cdot\vec{u} = \nabla\cdot\vec{u}' = \lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3' = \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt}$$

(α= specifična zapremina tečnosti). Ako su sva tri λ_k' istog znaka i nisu međusobno jednaka, onda su površine drugog reda φ = const. površine elipsoida. Zapremina makog delića tečnosti se tada u toku vremena menja i po veličini i po obliku. Ako su λ_k' međusobno jednaki, onda su te površine površine koncentričnih lopti. Strujnice su prave linije koje idu kroz centar koordinatnog sistema i zapremina makog delića se menja samo po veličini. Kada pak svi λ_k' nisu jednakog znaka, onda su površine φ= 0, 1, 2,... hiperboloidi i u pogledu menjanja zapremine ma kog delića tečnosti postoje sledeće mogućnosti: U pravcima za koje je λ_k' veće od nule postoji rastezanje a u pravcima za koje je $\lambda_k' < 0$ postoji stezanje tečnosti. Kada je zbir svih λ_k' jednak nuli, zapremina se po veličini ne menja a menja se po obliku.

Za treće parcijalno polje, tj. za antisimetričan deo polja, nam jednačina za odgovarajuće koeficijente λ_k'' (I 5 (11)) daje, što se možemo lako uveriti, dva konjugovano kompleksna korena, a treći, koji ćemo ovde označiti sa λ_3'', je nula. Prema tome postoji samo jedna prava vektorska linija kroz koordinatni početak. Pošto je λ_3'' = 0, to zapravo ona nije vektorska linija, na njoj je svuda parcijalna brzina u" = 0.

Na drugoj strani nam vektorski proizvod

(9) $$\vec{u}'' = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

kaže da vektor parcijalne brzine $\vec{u}''$ stoji normalno na vektor $\vec{\omega}$, koji je svuda u polju (srazmerno malom) jednak po jačini i pravcu i na vektor položaja $\vec{r}$. Ako koordinatni sistem orijentišemo ovako da je z-osa usmerena u pravcu i smislu vektora $\vec{\omega}$ (sl. 8), onda je u saglasnosti sa jedn. (2) u tom sistemu

$$\vec{\omega} = (0,\ 0, \omega)$$

i

(10) $$\vec{u}'' = \omega(-y, x, 0)$$

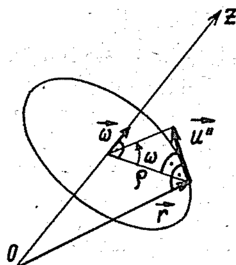
gde je

$$\omega = \omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Intenzitet vektora te parcijalne brzine

$$u'' = \omega\rho$$

(ρ = otstojanje od ose z) direktno je srazmeran otstojanju ρ. Pošto taj vektor stoji svuda i normalno na vektor



Sl. 8
Parcijalno polje rotacije i vektor ugaone brzine

$\vec{\omega}$, tj. na osu z, to treće polje samo za sebe pretstavlja kružno kretanje tečnosti kao čvrste celine oko ose z. Ako dakle parcijalna polja $\vec{u}_0$ i $\vec{u}'$ ne bi postojala, tečnost bi rotirala kao čvrsto telo oko ose z konstantnom ugaonom brzinom ω. Ovo parcijalno polje zove se i parcijalno polje rotacije.

Iz jedn. (9) ili (10) vidimo da se za posmatrača koji gleda u pravcu i suprotnom smislu delovanja vektora $\vec{\omega}$ rotacija vrši u pozitivnom smislu, tj. u suprotnom smislu okretanja skažaljke na satu ako gledamo u suprotnom smislu delovanja vektora $\vec{\omega}$. Vektor $\vec{\omega}$ zove se vektor ugaone brzine. On leži u pravcu ose rotacije, pokazuje i smisao rotacije, a po intenzitetu je jednak ugaonoj brzini kojom bi tečnost rotirala kada sem polja rotacije druga parcijalna polja ne bi postojala.

U opštem slučaju možemo strujno polje u oblasti svake tačke smatrati kao rezultantu spomenuta tri parcijalna polja sa karakterističnim veličinama $\vec{u}_0$, φ i $\vec{\omega}$ koje se obično sa mestom i u toku vremena menjaju. Kada se u polju, u makom bismo pravcu išli, svaka komponenta brzine linearno menja sa otstojanjem, kada su drugim rečima geometrijske promene komponenata vektora brzine konstantne, govorimo o linearnom vektorskom polju.

Vektorske linije strujnog polja su strujnice. Pošto element $d\vec{r}$ strujne linije leži u pravcu vektora brzine $\vec{u}$, to je

(11) $$\vec{u} \times d\vec{r} = 0$$

Odavde dobijamo odmah tri diferencijalne jednačine za strujnice

(12) $$\frac{dz}{w} = \frac{dy}{v} \qquad \frac{dx}{u} = \frac{dz}{w} \qquad \frac{dy}{v} = \frac{dx}{u}$$

Strujnice se odnose samo na jedan trenutak vremena i leže svuda u pravcu vektora brzine $\vec{u}$. U opštem slučaju se ne podudaraju sa trajektorijama (orbitama), tj. sa putanjama vazdušnih delića.

Delić koji se u trenutku vremena t_1 nalazi u tačci $A(x_1,y_1 z_1)$, dođe posle intervala vremena dt u tačku $A'(x_1 + dx,\ y_1 + dy,\ z_1 + dz)$ gde je

(13) $$dx = udt \qquad dy = vdt \qquad dz = wdt$$

Ove tri jednačine koje pretstavljaju diferencijalne jednačine trajektorije možemo pisati skraćeno u vidu jedne vektorske jednačine

(14) $$d\vec{r} = \vec{u}dt$$

Eleminacijom elementa vremena dt i vremena t iz jednačina (13) dobiju se posle integralenja dve funkcije

(15) $$f(x,y,z,x_1,y_1,z_1) = 0 \quad \text{i} \quad \varphi(x,y,z,x_1,y_1,z_1) = 0$$

tj. dve površine čiji presek je putanja delića koji u trenutku vremena t_1 prolazi kroz tačku $A(x_1,y_1 z_1)$.

Za razliku od strujnica koje se odnose samo na jedan trenutak vremena, trajektorije se odnose na jedan delić vazduha i pretstavljaju put delića u određenom intervalu vremena. Kada je strujno polje stacionarno, trajektorije se podudaraju sa strujnicama.

3. Osnovna jednačina dinamike u sistemu koji sa Zemljom rotira

U svakom inercijalnom sistemu S' važi Newton-ova osnovna jednačina dinamike

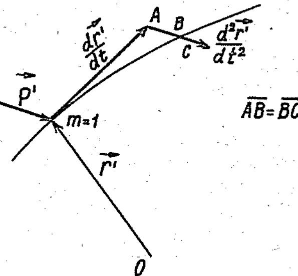
(1) $$\vec{P}_m' = m \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$$

gde je $\vec{P}_m'$ rezultanta svih sila koje od spolja deluju na materijalnu tačku mase m a $\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$ vektor ubrzanja te materijalne tačke sa vektorom položaja $\vec{r}'$ (sl. 9).

Osnovnu jednačinu dinamike možemo pisati još u jednom obliku koji je od značaja za razna izračunavanja. Do tog oblika dođemo množenjem jednačine (1) elementom vremena dt. Time dobijamo

(2) $$\vec{P}_m'dt = m\, d\vec{u}'$$

gde je $\vec{P}_m'dt$ impuls sile $\vec{P}_m'$ dodeljen telu mase m u intervalu vremena dt a $m\, d\vec{u}'$ promena količine kretanja $m\vec{u}'$ tog tela do koje dolazi zbog delovanja tog impulsa ($d\vec{u}'$ = promena vektora brzine $\vec{u}'$ u intervalu vremena dt).



Sl. 9
Kretanje tela pod dejstvom spoljašnje sile

Zamislimo desni ortogonalni koordinatni sistem S' sa kordinatama x', y', z' koji ima svoj početak u centru Zemlje, a makoja njegova osa je usmerena prema nekoj zvezdi nekretnici. Ovakav sistem možemo za pojave kretanja u atmosferi smatrati inercijalnim. U odnosu na kretanje vazduha se naime u dužem intervalu vremena kreće praktično pravolinijski i jednakom brzinom.

Za posmatrača na Zemlji ovakav sistem nije podesan, mnogo podesniji je naime sistem koji zajedno sa Zemljom rotira.

Zamislimo ortogonalni desni koordinatni sistem S sa koordinatama x, y, z koji zajedno sa Zemljom rotira a i njegov početak neka bude u centru Zemlje. Nekoj inače makojoj tačci u sistemu S' sa koordinatama x', y', z' i sa koordinatama x, y, z u sistemu S pripada vektor položaja

(3) $$\vec{r}' = \vec{r} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

($\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ i $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ = jedinični vektori (ortovi) u pravcu osa x', y' z' odn. x, y, z).

Sada tražimo brzinu $\frac{d\vec{r}'}{dt}$ materijalne tačke u odnosu na sistem S' (apsolutnu brzinu) kao funkciju relativne brzine $\frac{d\vec{r}}{dt}$, tj. brzine u odnosu na sistem S. Prema jedn. (3) materijalna tačka se u sistemu S' kreće brzinom

(4) $$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{u} + \vec{u}_p$$

gde je

(5) $$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

relativna brzina a

(6) $$\vec{u}_p = x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

tzv. <u>prenosna brzina</u>, tj. apsolutna brzina tačke koja svoj položaj u odnosu na sistem S ne bi menjala, koja bi drugim rečima zajedno sa sistemom S rotirala. Tačka bi zajedno sa Zemljom rotirala jednakom ugaonom brzinom

(7) $$\omega = \frac{2\pi}{24\cdot3600 - 236}\ \sec^{-1} = 7{,}29\cdot10^{-5}\ \sec^{-1}$$

(Zemlja se okrene jedanput oko svoje osovine u zvezdanom danu koji je za 236 sec kraći od srednjeg sunčeveg). U saglasnost sa definicijom ugaone brzine (II 2) jednačinu (6) možemo pisati i u obliku

(8) $$\vec{u}_p = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

($\vec{\omega}$ = vektor ugaone brzine Zemlje sa intenzitetom ω koji leži u pravcu ose rotacije a usmeren je prema severnom polu). Kad ovo uzmemo u jedn. (4) u obzir i pod $\vec{u}$ podrazumevamo relativnu brzinu (5), dobijamo

(9) $$\frac{d'\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

Kad smo apsolutnu brzinu $\frac{d'\vec{r}}{dt}$ izrazili relativnom brzinom $\frac{d\vec{r}}{dt}$ primenili smo na vektor položaja $\vec{r}$ operator

(10) $$\frac{d'}{dt} = \frac{d}{dt} + \vec{\omega}\times$$

Tako treba taj isti operator primeniti na vektor apsolutne brzine $\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}$ da bismo <u>apsolutno ubrzanje</u> $\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$ materijalne tačke izrazili pomoću relativnog ubrzanja $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ u sistemu S. Prema tome je

$$\frac{d'}{dt}\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right) + \vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

ili

(11) $$\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Apsolutno ubrzanje (ubrzanje u inercijalnom sistemu S') jednako je dakle zbiru iz tri parcijalna ubrzanja, iz relativnog ubrzanja $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ tj. iz ubrzanja u odnosu na sistem S, iz <u>Coriolis-ovog ubrzanja</u>

(12) $$-\vec{C} = 2\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

i <u>prenosnog ubrzanja</u>

(13) $$-\vec{Z} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

koje bi se javljalo kad bi bila materijalna tačka čvrsto povezana sa sistemom S.

Unošenjem dobivene vrednosti za ubrzanje u jedn. (1), dobijamo osnovnu jednačinu dinamike za relativni sistem S koji rotira

konstantnom ugaonom brzinom ω:

(14) $$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{P}_m' - 2m\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Ova jednačina važi za posmatrača koji zajedno sa Zemljom rotira. Za njega postoje sem stvarne spoljašnje sile $\vec{P}$ još dve spoljašne sile. Prva od ovih dveju sila

(15) $$\vec{C}_m = -2m\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

je Coriolis-ova sila ili sila devijacije (devijatorna sila). Ona je za tumačenje strujanja vazduha u atmosferi od osnovnog značaja. Vidimo da stoji normalno na pravac koji je paralelan osi rotacije Zemlje (leži dakle paralelno ekvatorskoj ravni) i na vektor brzine (na pravac kretanja tela). U relativnom koordinatnom sistemu S gde je $\vec{\omega} = (0,0,\omega)$ je

(16) $$\vec{C}_m = -2m\begin{vmatrix}\vec{i},\vec{j},\vec{k}\\0,0,\omega\\u,v,w\end{vmatrix} = 2m\,(\omega v,\ -\omega u,\ 0)$$

(u, v, w = komponente brzine u pravcima x, y, z). Druga sila

(17) $$\vec{Z}_m = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

stoji normalno i na pravac koji je paralelan osi rotacije i na vektor periferne brzine zemljine podloge. U istom sistemu S, gde je $\vec{\omega}\times\vec{r} = (-\omega y,\ \omega x,\ 0)$, je

(18) $$\vec{Z}_m = -m\begin{vmatrix}\vec{i},\vec{j},\vec{k}\\0,0,\omega\\-\omega y,\omega x,0\end{vmatrix} = m(\omega^2 x,\ \omega^2 y,\ 0)$$

Odavde vidimo da je ta druga sila centrifugalna sila i da deluje na telo mase m koje je u odnosu na sistem S u stanju mirovanja.

Coriolisova sila $\vec{C}_m$ i centrifugalna sila $\vec{Z}_m$ za osmatrača na Zemlji postoje kao prave spoljašnje sile. Ustvari su to dve prividne sile i u inercijalnom sistemu kao spoljašnje sile uopšte ne postoje.

Silu devijacije i centrifugalnu silu koje deluju na jedinicu mase označićemo sa C odn. Z.

4. Geopotencijal i sila zemljine teže

U prethodnom odeljku posmatrana materijalna tačka kreće se u polju sile gravitacije. Ova sila deluje, kao što je poznato, prema centru Zemlje i srazmerna je masama M i m Zemlje i materijalne tačke a obrnuto je srazmerna kvadratu rastojanja r od centra Zemlje. Prema tome u relativnom koordinatnom sistemu S (sa početkom u centru Zemlje i sa z-osom prema severnom polu) na materijalnu tačku mase m = 1 deluje sila gravitacije

(1) $$\vec{g}_N = -f\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -f\frac{M}{r^2}\left(\frac{x}{r},\ \frac{y}{r},\ \frac{z}{r}\right)$$

gde je

(2) $f = (6{,}670 \pm 0{,}01)\cdot 10^{-8}\ cm^3 g^{-1} sec^{-2}$ i $M = 5{,}97\cdot 10^{24}$ kg

Sila gravitacije često se izražava <u>gradijentom potencijala polja gravitacije</u>

(3) $$\emptyset' = fM\left(\frac{1}{r_o} - \frac{1}{r}\right)$$

(r_o = otstojanje neke, proizvoljno izabrane, fiksne tačke T_o od centra Zemlje), tako da je

(4) $$\vec{g}_N = -\nabla\emptyset'$$

Slično ima i centrifugalna sila svoj potencijal

(5) $$\emptyset'' = \frac{1}{2}\omega^2(x_o^2 + y_o^2 - x^2 - y^2)$$

Prema tome je

(6) $$\vec{Z} = -\nabla\emptyset''$$

Sila

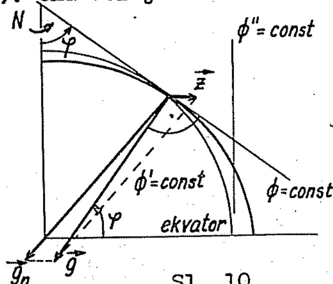
(7) $$\vec{g} = \vec{g}_N + \vec{Z} = -\nabla\emptyset$$

gde je

(8) $$\emptyset = \emptyset' + \emptyset''$$

<u>potencijal polja zemljine teže</u>, je sila zemljine teže koja deluje na jedinicu mase (= ubrzanje zemljine teže). Potencijal je funkcija koja se može odrediti do aditivne konstante. U našem slučaju se meri od tačke $T_o(x_o, y_o, z_o)$ u kojoj je $\emptyset = 0$. Ako smatramo da tačka T_o leži na srednjoj visini površine mora, onda se potencijal zemljine teže u meteorologiji zove <u>geopotencijal</u>.

Sila zemljine teže je rezultanta iz sile gravitacije i gore spomenute centrifugalne sile $\vec{Z}$ (sl. 10). Ona deluje vertikalno na dole, normalno na nivoske površine $\emptyset$ = const. potencijala polja zemljine teže, tj. na horizontalne površine. Sile zemljine teže, sem na polovima i na ekvatoru, ne deluje prema centru Zemlje već u pravcu linije koja ekvatorijalnu ravan seče pod većim uglom nego pravac u kome deluje sila zemljine gravitacije (sl. 10). Prema definiciji je taj veći ugao geografska širina φ. Otstojanje makoje nivoske površine (ekvipotencijalne površine) od centra sa geografskom širinom se smanjuje (Zemlja je geoid).



Sl. 10
Sila zemljine teže i definicija geografske širine

U meteorologiji se često upotrebljava ortogonalni koordinatni sistem sa horizontalnim osama x i y i sa vertikalnom z-osom prema zenitu. U saglasnosti sa jedn. (7) je u ovakvom sistemu

(9) $$\vec{g} = (0, 0, -g) = (0, 0, -\frac{\partial\emptyset}{\partial z}) \quad \text{i} \quad g = \frac{\partial\emptyset}{\partial z}$$

Vidimo da se geopotencijal sa visinom povećava i prilikom promene visine za dz poveća se za

(10) $$d\emptyset = g\,dz$$

Na visini z od mora je prema tome

(11) $$\emptyset = \int_0^z g\,dz \qquad [\emptyset] = [m^2sec^{-2}]$$

Očigledno je geopotencijal jednak potencijalnoj energiji/zbog polja zemljine teže jedinice mase u odnosu na srednju visinu površine mora.

Iz jedn. (10) vidimo da je otstojanje (dz) dveju ekviskalarnih površina obrnuto srazmerno ubrzanju zemljine teže. Sa geografskom širinom, sa kojom se g povećava, se dakle otstojanje dveju ekvipotencijalnih površina smanjuje. Pri jednakoj visini je geopotencijal na polu veći nego na ekvatoru.

U kg-m-sec sistemu mera, jedinica za geopotencijal je $1 m^2sec^{-2}$. V. Bjerknes je predložio za upotrebu u sinoptičkoj meteorologiji praktičnu jedinicu 1 dinamički metar (1 gdm), jedinicu koja je deset puta veća od ove. Sada se upotrebljava 9,8000 puta veća jedinica od $1\ m^2sec^{-2}$ i zove se geopotencijalni metar (1 gpm):

(12) $$1\ gpm = 9{,}8000\ m^2sec^{-2}$$

U ovim jedinicama, koje imaju izvesnu prednost pred običnim metrima, izražavaju se u sinoptičkoj meteorologiji visine. Prilikom horizontalnog strujanja vazduha visina izražena u geopotencijalnim metrima se ne menja, dok se visina izražena u običnim obično menja. U atmosferi se prilikom promene visine za 1 m geopotencijal promeni za g:9,8 gpm, tj. kod nas otprilike za 1 gpm.

U polju zemljine teže deluje svuda na makoje telo sila zemljine teže. Ako zbog toga u jednačini 3 (14) mesto $\vec{P}_m' - m\vec{\omega}x(\vec{\omega}\times\vec{r})$ pišemo $- m\nabla\emptyset + m\vec{F}'$ gde $\vec{F}'$ znači rezultantu svih ostalih spoljašnjih sila, sem sile zemljine teže, koje na telo jedinice mase deluju, onda vidimo da u rotirajućem sistemu Zemlje važi sledeća osnovna jednačina dinamike

(13) $$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla\emptyset + \vec{F}' - 2\vec{\omega}\times\vec{u}$$

($\vec{u}$ = vektor brzine u odnosu na Zemlju).

Jednačina (13) važi za svakog posmatrača koji zajedno sa Zemljom jednakom brzinom rotira. Ona nam kaže da je za takvog posmatrača rezultanta iz sile zemljine teže, ostalih spoljašnjih sila koje sem sile gravitacije postoje za posmatrača u inercijalnom sistemu S' i Coriolisove sile jednaka relativnom ubrzanju. Svakako možemo sve te sile izraziti i pomoću komponenata u makom koordinatnom sistemu koji sa Zemljom rotira. Jednčina (13) nas ništa ne vezuje za specijalni sistem S.

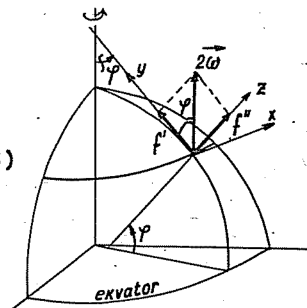
U relativnom koordinatnom sistemu čija z-osa leži u pravcu delovanja sile zemljine teže i to prema zenitu a x i y ose su usmerene prema istoku odn. severu je (sl. 11)

(14) $$\vec{g} = -\nabla\emptyset = (0,0,-g) \quad i \quad 2\vec{\omega} = (0,f',f)$$

gde je

(15) $$f = 2\omega\sin\varphi \quad i \quad f' = 2\omega\cos\varphi$$

(f se često naziva parametar sile devijacije). Dalje je tamo



Sl. 11
Relativni koordinatni sistem koji je često u upotrebi

(16) $$-2\vec{\omega} \times \vec{u} = (fv - f'w,\ -fu,\ f'u)$$

Kad sve ovo uzmemo u jednačini kretanja (13) u obzir, dobijamo u takvom relativnom koordinatnom sistemu sledeće jednačine kretanja

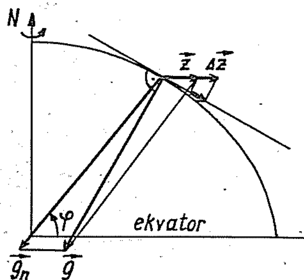
(17) $$\begin{cases} \dot{u} = F_x' + fv - f'w \\ \dot{v} = F_y' - fu \\ \dot{w} = -g + F_z' + f'u \end{cases}$$

5. Sila devijacije i krug inercije

Za dinamičku meteorologiju je sila devijacije (Coriolis-ova sila) od vrlo velikog značaja. Ovde ćemo se malo više upoznati sa njom sa kvalitativne i kvantitativne strane.

Zamislimo da negde na severnoj polulopti bacimo neko telo po potpuno glatkoj horizontalnoj podlozi prema severu. To telo na samom početku sa Zemljom rotira jednakom brzinom, tada je naime komponenta relativne brzine tela prema istoku jednaka nuli.

Prilikom kretanja prema severu telo dolazi u oblast gde je periferna brzina tačaka zemljinog tla sve manja. Zbog toga ima telo na svom putu prema severu u odnosu na tle sve veću i veću brzinu prema istoku i posmatrač na Zemlji gledajući prema severu video bi kako se pravac puta menja u desno, kako se povećava komponenta relativne brzine prema istoku. U vezi s tim u telu se javlja sve veća cetrifugalna sila od ose rotacije Zemlje upolje. Ova sila je veća od one koja bi se javljala u istom telu kad bi ono bilo na onom mestu u odnosu na tle u stanju mirovanja. Horizontalna komponenta tog priraštaja centrifugalne sile prikazana je na slici 12 (debelo izvučena strelica) i deluje ka jugu, tj. opet u smislu menjanja pravca kretanja udesno. Vidimo da na telo deluje prividno neka sila i ta prividna sila je sila devijacije. Koliko ona utiče na menjanje pravca kretanja videćemo kasnije.



Sl. 12
Priraštaj centrifugalne sile zbog kretanja prema istoku

Na posmatrano telo koje se kreće bez trenja po horizontalnoj podlozi deluje pored sile zemljine teže još jedna sila od spolja. Ta sila prinuđava telo da se kreće po horizontalnoj podlozi. Ova sila $m\vec{F}'$ je usmerena vertikalno na gore, te je prema zakonu o jednakosti akcije i reakcije po jačini jednaka sili kojom telo deluje na tle. Ako uzmemo u obzir da je prilikom horizontalnog kretanja $\dot{w}$ = 0, dobijamo iz treće jednačine 4 (17) da je

(1) $$F_{mz}' = mg - mf'u$$

($F_{mz}' = mF_z'$ = vertikalna komponenta sile $m\vec{F}'$). Vidimo da je ova sila po intenzitetu jednaka razlici između intenziteta sile zemljine teže i vertikalne komponente sile devijacije. Ona je od sile zemljine teže manja kada se telo kreće prema istoku ($u > 0$) i veća kada se telo kreće prema zapadu ($u < 0$).

Kao što vidimo iz jedn. 4 (17) na naše posmatrano telo deluje sila devijacije

(2) $$\vec{C}_m = m(fv,\ -fu,\ f'u)$$

sa jačinom u horizontalnom i vertikalnom pravcu

(3) $$C_{mh} = mfv_h = 2m\omega v_h \sin\varphi \quad \text{odn. i} \quad C_{mv} = mf'u = 2m\omega u \cos\varphi$$

gde je

(4) $$v_h = \sqrt{u^2 + v^2}$$

brzina kretanja posmatranog tela.

Kolike su komponente C_h i C_v Coriolisove sile $\vec{C}$ koja deluje na telo mase m = 1 kg prilikom horizontalnog kretanja brzinom v_h = 1 m sec^{-1} odn. komponentom brzine u = 1 m sec^{-1} prema istoku na nekim geografskim širinama vidimo iz tablice

φ =	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90°	
C_h =	0,0	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,4	1,4	1,5	$\cdot 10^{-4}$ kg m sec^{-2}
C_v =	1,5	1,4	1,4	1,3	1,1	0,9	0,7	0,5	0,3	0,0	$\cdot 10^{-4}$ kg m sec^{-2}.

Sila devijacije je srazmerna masi tela. Na masu m = 1000kg = 1 tona koja se kreće na geografskoj širini φ = 45° (C_h = 10^{-4} kg m sec^{-2}) brzinom v_h = 20 m sec^{-1} deluje napr. u horizontalnom pravcu jačinom $1\cdot 10^{-4}\cdot 1000\cdot 20$ kg m sec^{-2} = 0,2 kp. Kad bi se ovo telo na onom mestu jednakom brzinom kretalo prema istoku (zapadu) bilo bi za 0,2 kp lakše (teže) nego što bi bilo kada bi u odnosu na tle bilo u stanju mirovanja ili bi se pak kretalo u meridionalnom pravcu. Kad pomislimo da se u atmosferi često velikom brzinom kreću ogromne količine vazduha (u kubnom kilometru prizemnog vazduha ima više nego milion tona vazduha!), onda vidimo da je za tumačenje procesa u atmosferi sila devijacije stvarno od vrlo velikog značaja.

Prve dve jednačine sistema jednačina 4 (17) možemo u našem slučaju (w = 0) pisati i u vidu jedne vektorske jednačine

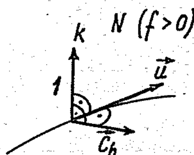
(5) $$\dot{\vec{u}} = -f\vec{k} \times \vec{u}$$

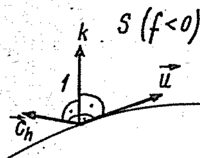
gde je $\vec{k}$ ort u pravcu z-ose a $-f\vec{k}\times\vec{u}$ vektor horizontalne komponente sile devijacije. Odavde vidimo da horizontalna komponenta ove sile deluje na severnoj polulopti ($f > 0$) u smislu sl. 13 u desno od vektora brzine a na južnoj ($f < 0$) u levo.

Množenjem jedn. (5) skalarno sa $\vec{u}$ dobijamo

(6) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{v_h^2}{2}\right) = 0$$

tj. pod uticajem sile





Sl. 13
Smisao delovanja horizontalne komponente sile devijacije

devijacije se kinetička energija a time i brzina v_h ne menja. Ova sila ne obavlja nikakav rad, pošto deluje normalno na pravac kretanja.

Sila devijacije je u ovom slučaju jedina sila koja od spolja deluje normalno na put. Zbog toga je, pod pretpostavkom da se krivina putanje ne menja mnogo sa geografskom širinom, ona po intenzitetu jednaka centrifugalnoj sili. Kad uzmemo u obzir da je centrifugalno ubrzanje $v_h^2 : r$ (r = poluprečnik krivine putanje), dobijamo odavde

(7) $$r = \frac{v_h}{f} = \frac{v_h}{2\omega \sin\varphi}$$

Tablica nam daje vrednosti poluprečnika r na raznim geografskim širinama za telo koje se po horizontalnoj podlozi kreće brzinom $v_h = 1 \text{ m sec}^{-1}$

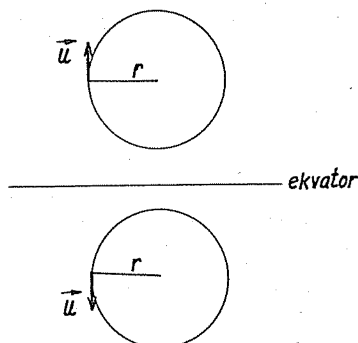
φ =	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90°
r =	∞	39,42	20,05	13,71	10,67	8,95	7,92	7,30	6,96	6,86 km

Vidimo da su poluprečnici krivina srazmerno mali i da je zbog toga krivina posmatranog puta (sem pri vrlo velikim brzinama) skoro svuda jednaka. Putanja posmatranog tela je dakle približno krug koji se zove krug inercije. Na severnoj polulopti telo rotira u negativnom a na južnoj u pozitivnom smislu (sl. 14). Zbog dejstva sile devijacije put posmatranog tela se savija, na severnoj polulopti u desno, na južnoj u levo. Ovakvo savijanje puta zove se anticiklonalno savijanje. Opšte možemo kazati da sila devijacije deluje u smislu anticiklonalnog savijanja puta.

Telo se po krugu inercije kreće ravnomerno. Zbog toga se u vremenu

(8) $$t_o = 2\frac{v_h}{f}\pi : v_h = \frac{\pi}{\omega \sin\varphi} = \frac{12}{\sin\varphi} \text{ časova}$$

ponovo vrati na isto mesto. Ovaj period od poluprečnika ništa ne zavisi. Zavisi samo od ugaone brzine $\omega_z = \omega \sin\varphi$ Zemlje oko lokalne ose rotacije.



Sl. 14
Krug inercije

6. Gradijentna sila i hidrodinamičke jednačine kretanja za potpun vazduh

Osnovna jednačina dinamike 4 (13) važi za sva tela. Svejedno je da li je telo u čvrstom, tečnom ili gasovitom stanju, ona važi uvek. Pitanje je samo, kako primeniti osnovnu jednačinu dinamike na tečnost i gas, na vazduh u atmosferi.

Na svaki delić vazduha ili makog drugog gasa ili tečnosti deluju sa svih strana sile pritiska. Rezultanta svih sila pritiska koje deluju na neko telo u vazduhu zove se gradijentna sila. Ona je spoljašnja sila i uslovljena je raspodelom pritiska u tečnosti (gasu).

Na delić vazduha zapremine V deluje u pravcu ose x zbog delovanja sila pritiska na njegovu površinu σ sledeća sila

$$-\int_\sigma p\vec{i}\cdot\vec{n}\,d\sigma = -\int_V \nabla\cdot(p\vec{i})\,dV = -\int_V \vec{i}\cdot\nabla p\,dV$$

($\vec{i}$ = ort u pravcu ose x, $\vec{n}$ = kao obično, ort spoljašnje normale). Ovde smo odmah primenili Gaussov identitet i uzeli u obzir da je $\nabla\cdot\vec{i} = 0$. Ako je zapremina delića srazmerno mala, onda možemo $\vec{i}\cdot\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}$ staviti ispred znaka za integralenje i za komponentu gradijentne sile u pravcu x dobijamo $-\frac{\partial p}{\partial x}V$.

Komponente u pravcu osa y i z dobijamo na isti način, tako da je gradijentna sila koja deluje na posmatrani delić

(1) $$\vec{G}_{pV} = -V\nabla p = V\left(-\frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{\partial p}{\partial y}, -\frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

Kao što vidimo deluje gradijentna sila u pravcu i smislu barskog gradijenta, tj. u pravcu i smislu najbržeg opadanja vazdušnog pritiska. Srazmerna je zapremini vazduha na koji deluje i intenzitetu gradijenta pritiska. Od mase delića ništa ne zavisi, što znači da bi zapremina V moglá biti ispunjena makojim drugim telom i gradijentna sila bila bi jednaka.

Na vazduh u atmosferi deluje pored sile zemljine teže uvek i gradijentna sila (1). Ona se očigleno na isti način izražava u apsolutnom i našem relativnom koordinatnom sistemu. Ako ostale spoljašnje sile (trenje) za sada zanemarimo, onda možemo da zamislimo da se makoji delić vazduha u atmosferi kreće kao materijalna tačka u saglasnosti sa jednačinom 4 (13) gde je

(2) $$\vec{F}' = -\alpha\nabla p = -\alpha\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

Vidimo da jednačina kretanja za vazduh bez trenja glasi

(3) $$\dot{\vec{u}} = -\nabla\phi - \alpha\nabla p - 2\vec{\omega}\times\vec{u}$$

U koordinatnom sistemu sa x-osom prema istoku, y-osom prema severu i sa z-osom prema zenitu nam ova jednačina daje sledeće tri skalarne jednačine (4 (17)):

(4) $$\begin{aligned}\dot{u} &= -\alpha\frac{\partial p}{\partial x} + fv - f'w\\ \dot{v} &= -\alpha\frac{\partial p}{\partial y} - fu\\ \dot{w} &= -g - \alpha\frac{\partial p}{\partial z} + f'u\end{aligned}$$

Napisane jednačine zovu se Eulerove hidrodinamičke jednačine kretanja za potpun gas i odnose se na relativni koordinatni sistem.

U polju gde postoje parcijalni izvodi komponenata vektora brzine $\vec{u}$ po koordinatama x, y, z i po vremenu t, možemo komponente ubrzanja da izrazimo pomoću lokalnih i geometrijskih promena komponenata brzine. U tom slučaju je (I 4)

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w$$

(5) $$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w$$

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w$$

ili u skraćenom obliku (I 3)

(6) $$\dot{\vec{u}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}$$

U specijalnom slučaju kada je lokalna promena vektora brzine jednaka nuli,

(7) $$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$$

(anemograf bi pokazivao vetar konstantnog pravca i konstantne jačine), govorimo o <u>stacionarnom</u> (<u>permanentnom</u>) strujanju vazduha.

U glavnom je u atmosferi vertikalna komponenta vektora brzine neuporedivo manja od horizontalne. Zbog toga možemo često treći član na desnoj strani prve jednačine sistema (4) zanemariti. Dalje vidimo da je u trećoj jednačini tog sistema član $f'u$ uvek neuporedivo manji od g (napr. pri $\varphi = 45^o$ i $u = 10\ m\ sec^{-1}$ je $f'u = 0{,}0001\ g$). Ako sada ovaj i gore pomenuti član zanemarimo, dobijamo mesto sistema (4) sledeći

$$\dot{u} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial x} + f\,v$$

(8) $$\dot{v} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial y} - f\,u$$

$$\dot{w} = -g - \alpha\frac{\partial p}{\partial z}$$

Napisan u vektorskom obliku, ovaj sistem glasi

(9) $$\dot{\vec{u}} = -\nabla\emptyset - \alpha\nabla p - f\,\vec{k}x\vec{u}$$

($\vec{k}$ = ort u pravcu ose z usmeren naviše). Sistem jednačina (8) naročito je zgodan, pošto ne važi samo za izabrani koordinatni sistem već, kao što se vidi iz vektorske jednačine (9), za svaki drugi ortogonalni pravolinijski koordinatni sistem sa z-osom prema zenitu, dakle sa makakvom orijentacijom horizontalnih osa x i y.

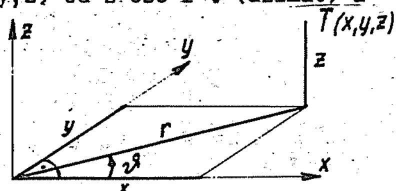
Za proučavanje kružnog kretanja vazduha u atmosferi često je zgodno jednačine kretanja pisati u cilindričnom koordinatnom sistemu sa vertikalnom z-osom.

Ako je r otstojanje tačke $T(x,y,z)$ od z-ose i ϑ (<u>azimut</u>) ugao koji u smislu slike 15 gradi pozitivna x-osa našeg sistema sa projekcijom radius vektora na x-y ravan i to onog koji pripada toj tačci, onda je očigledno

$$x = r\cos\vartheta \qquad y = r\sin\vartheta \qquad z = z$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\vartheta - r\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta}$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\vartheta + r\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta}$$



Sl. 15
Cilindrični koordinatni sistem

i

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\vartheta - 2\dot{r}\sin\vartheta\,\dot{\vartheta} - r\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 - r\sin\vartheta\,\ddot{\vartheta}$$
$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\vartheta + 2\dot{r}\cos\vartheta\,\dot{\vartheta} - r\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 + r\cos\vartheta\,\ddot{\vartheta}$$

Unošenjem ovih vrednosti u jedn. (8) dobijamo

$$\ddot{r}\cos\vartheta - 2\dot{r}\sin\vartheta\,\dot{\vartheta} - r\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 - r\sin\vartheta\,\ddot{\vartheta} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial x} + f\dot{r}\sin\vartheta + f r\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}$$

$$\ddot{r}\sin\vartheta + 2\dot{r}\cos\vartheta\,\dot{\vartheta} - r\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 + r\cos\vartheta\,\ddot{\vartheta} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial y} - f\dot{r}\cos\vartheta + f r\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}$$

$$\ddot{z} = -g - \alpha\frac{\partial p}{\partial z}$$

Množenjem prve jednačine sa $\cos\vartheta$ a druge sa $\sin\vartheta$, dobijamo posle sabiranja obeju jednačina

$$\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 = -\alpha\frac{\partial p}{\partial x}\cos\vartheta - \alpha\frac{\partial p}{\partial y}\sin\vartheta + f r\dot{\vartheta}$$

gde je

$$-\alpha\frac{\partial p}{\partial x}\cos\vartheta - \alpha\frac{\partial p}{\partial y}\sin\vartheta = -\alpha\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) = -\alpha\frac{\partial p}{\partial r}$$

Sličnim postupkom dobili bismo i drugu jednačinu u kojoj se javlja ubrzanje $r\ddot{\vartheta}$ komponente brzine $r\dot{\vartheta}$ u horizontalnom pravcu normalno na radius vektor r. Na taj način mesto sistema jednačina (8) dobijamo

(10)
$$\ddot{r} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial r} + f r\dot{\vartheta} + r\dot{\vartheta}^2$$
$$r\ddot{\vartheta} = -\alpha\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \vartheta} - f\dot{r} - 2\dot{r}\dot{\vartheta}$$
$$\ddot{z} = -g - \alpha\frac{\partial p}{\partial z}$$

7. Dinamički i mešoviti granični uslov

Kao što na graničnim površinama jednačinu kontinuiteta zamenjuje kinematički granični uslov, tako na takvim površinama jednačinu dinamike zamenjuje dinamički granični uslov.

Dinamički granični uslov se izvodi prema V. Bjerknesu iz uslova da na graničnoj površini ne postoji diskontinuitet u pritisku. Ako i ovde koordinate vazdušnih delića koji se nalaze s jedne strane označimo bez crtice a onih sa druge strane crticom, onda je na graničnoj površini

(1) $$p(x, y, z, t) - p'(x', y', z', t) = 0 \qquad \text{za } \vec{r} = \vec{r}'$$

Ako je $d\vec{r}$ elemenat puta na graničnoj površini i odnosi se na neki inače makoji trenutak vremena $t = t_o$, onda nam jednačina (1) diferencirana daje

(2) $$(\nabla p - \nabla p')\cdot d\vec{r} = 0$$

Na graničnoj površini postoji skok u gradijentu atmosferskog pritiska

$$\nabla p - \nabla p' = \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p'}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial p'}{\partial z}\right)$$

tj. vektor koji stoji, kao što vidimo iz dinamičkog graničnog uslova (2), normalno na graničnu površinu. Prema tome je u koordinatnom sistemu sa x i y osama na frontalnoj površini

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad i \quad \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p'}{\partial y} = 0$$

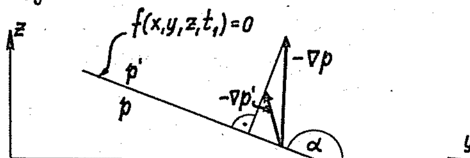
a u pravcu normalnom na površinu (u pravcu z) postoji diskontinuitet u gradijentu pritiska (sl. 16).

Iz dinamičkog graničnog uslova (2), koji možemo pisati i u obliku

(3) $$\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p'}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial p'}{\partial z}\right) dz = 0$$

izražava se nagib granične površine. Tako npr. odavde sledi da je u trenutku vremena t_0 u pravcu y nagib granične površine

(4) $$tg\alpha = \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p'}{\partial y}}{\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial p'}{\partial z}}$$



Sl. 16
Skok u gradijentu pritiska na graničnoj površini

Na graničnoj površini

(5) $$f(x,y,z,t) = f'(x',y',z',t) = 0$$

je jednovremeno ispunjen i dinamički i kinematički granični uslov. Ako mesto f i f' pišemo p - p', onda za graničnu površinu očigledno važi

(6) $$\frac{\partial(p - p')}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla(p - p') = 0 \quad i \quad \frac{\partial(p - p')}{\partial t} + \vec{u}'\cdot\nabla(p - p') = 0$$

Kad oduzmemo jednu jednačinu od druge i delimo dobijenu jednačinu sa $|\nabla(p - p')|$, dobijamo jednačinu iz koje proizlazi da jednačine (6) ispunjavaju kinematički granični uslov 1 (17). One ispunjavaju i dinamički granični uslov, pošto kažu da je individualna promena razlike u vazdušnom pritisku između dva susedna delića vazduha, od kojih jedan leži s jedne a drugi s druge strane površine, jednaka nuli. Jednačine (6) ispunjavaju jedan i drugi uslov, one pretstavljaju mešoviti granični uslov.

8. Tenzorski način pisanja jednačina kretanja

Osnovna jednačina dinamike 6 (3)

(1^a) $$\dot{\vec{u}} = -\nabla\emptyset - \alpha\nabla p - 2\vec{\omega} \times \vec{u}$$

koja sadrži sledeće tri skalarne jednačine

$$(2) \qquad \begin{cases} \dot{u}_1 = -\frac{\partial \emptyset}{\partial x_1} - \alpha\frac{\partial p}{\partial x_1} - (2\omega_2 u_3 - 2\omega_3 u_2) \\ \dot{u}_2 = -\frac{\partial \emptyset}{\partial x_2} - \alpha\frac{\partial p}{\partial x_2} - (2\omega_3 u_1 - 2\omega_1 u_3) \\ \dot{u}_3 = -\frac{\partial \emptyset}{\partial x_3} - \alpha\frac{\partial p}{\partial x_3} - (2\omega_1 u_2 - 2\omega_2 u_1) \end{cases}$$

tenzorski napisana glasi (I 3)

$$(1^b) \qquad \dot{u}_i = -\frac{\partial \emptyset}{\partial x_i} - \alpha\frac{\partial p}{\partial x_i} - 2\omega_{ik}u_k$$

Kad pogledamo jednačinu (2), vidimo da ovde ω_{ik} znači sledeći antisimetrični tenzor

$$(3) \qquad \omega_{ik} = \begin{Bmatrix} \omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13} \\ \omega_{21}, \omega_{22}, \omega_{23} \\ \omega_{31}, \omega_{32}, \omega_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0, -\omega_3, \omega_2 \\ \omega_3, 0, -\omega_1 \\ -\omega_2, \omega_1, 0 \end{Bmatrix} = -\omega_{ki}$$

Videli smo (6 (6)) da važi identitet

$$(4^a) \qquad \dot{\vec{u}} \equiv \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}$$

Tenzorski napisan glasi

$$(4^b) \qquad \dot{u}_i \equiv \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

Član $\vec{u}\cdot\nabla\vec{u} = u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ ponekada se piše, kao što je to prvi uradio H. Lamb i u obliku

$$\vec{u}\cdot\nabla\vec{u} = (u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \dots, \dots) =$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{u_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} + \frac{u_3^2}{2}) - u_2(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}) + u_3(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}), \dots, \dots\right]$$

ili skraćeno napisano (I 3) na jedan i drugi način

$$(5^a) \qquad \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} = \nabla(\frac{u^2}{2}) + (\nabla x\vec{u})x\vec{u}$$

$$(5^b) \qquad u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{u_k^2}{2}) - u_k(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k})$$

Kad ovo uzmemo u obzir, možemo jednačine (1^a) i (1^b) pisati i u obliku

$$(6^a) \qquad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla(\frac{u^2}{2}) + (\nabla x\vec{u})x\vec{u} = -\nabla\emptyset - \alpha\nabla p - 2\vec{\omega}\, x\vec{u}$$

odn.

$$(6^b) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u_k^2}{2}\right) - u_k\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial \emptyset}{\partial x_i} - \alpha\frac{\partial p}{\partial x_i} - 2\omega_{ik}u_k$$

Ovaj oblik jednačine kretanja često se upotrebljava pri rešavanju prognostičke jednačine iz oblasti numeričke prognoze.

Jednačina kontinuiteta napisana na jedan i drugi način glasi

$$(7^a) \text{ i } (7^b) \qquad \nabla\cdot(\varrho\vec{u}) = -\frac{\partial\varrho}{\partial t} \quad \text{ili} \quad \frac{\partial(\varrho u_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial\varrho}{\partial t}$$

Pomoću nje možemo jednačini dinamike dati još jedan oblik:

Množenjem jedn. (1), kad uzmemo u obzir identitet (4), sa ϱ i jednačine kontinuiteta vektorom brzine dobijamo posle sabiranja i sređivanja odmah jednačinu

$$(8^a) \qquad \frac{\partial(\varrho\vec{u})}{\partial t} + \nabla\cdot(\varrho\,\vec{u}\vec{u}) = -\varrho\nabla\emptyset - \nabla p - 2\varrho\vec{\omega}\times\vec{u}$$

ili tenzorski napisano

$$(8^b) \qquad \frac{\partial(\varrho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u_i u_k)}{\partial x_k} = -\varrho\frac{\partial\emptyset}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - 2\varrho\omega_{ik}u_k$$

Simetrični tenzor (dijada)

$$(9) \qquad \varrho\vec{u}\vec{u} = \varrho u_i u_k = \begin{cases} \varrho u_1u_1, & \varrho u_1u_2, & \varrho u_1u_3 \\ \varrho u_2u_1, & \varrho u_2u_2, & \varrho u_2u_3 \\ \varrho u_3u_1, & \varrho u_3u_2, & \varrho u_3u_3 \end{cases}$$

zove se tenzor impulsa struje.

9. Jednačina kretanja za turbulentan vazduh

Prilikom kretanja u atmosferi vazduh se neprestano meša. Delićima vazduha se zbog toga neprestano menjaju visina, pravac i brzina kretanja. Onaj vazduh koji se brže kreće ubrzava onaj koji se kreće sporije i suprotno tome sporiji delići usporavaju kretanje bržih.

Vazduh se kreće pod dejstvom raznih impulsa koji dolaze sa svih strane iz okolne sredine (atmosfere i podloge) i koje delić delom zadržava a delom predaje dalje. Pod dejstvom tih impulsa, unutrašnjih i spoljašnjih (koji dolaze od zemljine podloge), neprestano se menja pravac kretanja delića a neprestano se menja i pritisak, a time i gradijentna sila koja na njega deluje. Vidimo da strujanje vazduha u atmosferi uglavnom nije laminarno, već je više ili manje turbulentno.

Sve sitne promene veličina stanja vazduha koje se prilikom turbulentnog kretanja neprestano pojavljuju nismo u stanju da odredimo. Naše metode merenja to ne dozvoljavaju. Mesto trenutnih vrednosti veličina stanja u_i, p, T, ϱ,... možemo svakako da poznajemo srednje "ujednačene" vrednosti $\bar{u}_i$, $\bar{p}$, $\bar{T}$, $\bar{\varrho}$,... koje se odnose na neko, inače makoje mesto u atmosferi i na više ili manje kratak interval vremena τ.

Prilikom izvođenja jednačine hidrodinamike za ujednačena

kretanja ćemo da sledimo H. Ertela (1937), nemačkog meteorologa-teoretika. On je dao najopštije rešenje tog problema, koji je prvi produbljeno proučavao Th. Hesselberg (1926).

Srednja vrednost neke veličine α koja se u datoj tačci u polju posmatranja odnosi na interval vremena $[t-\tau, t+\tau]$, definisana je na sledeći način

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \alpha(t)\, dt$$

U dovoljno velikom intervalu vremena 2τ prolazi kroz tačku posmatranja n vazdušnih delića. Za svaki takav delić važe tri jednačine dinamike za kretanje vazduha bez trenja i jednačina kontinuiteta. U vezi sa tih n delića postoji 3n jednačina dinamike i i n jednačina kontinuiteta. Sabiranjem n jednačina iste vrste, napisane u obliku impulsa struje 8 (8) i delenjem sa n dobijamo

$$(1) \qquad \frac{\partial \overline{\varrho u_i}}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\varrho u_i u_k})}{\partial x_k} + 2\omega_{ik}\overline{\varrho u_k} = -\bar{\varrho}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}$$

Sličnim postupkom dobijamo i jednačinu kontinuiteta za ujednačena kretanja:

$$(2) \qquad \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\varrho u_k})}{\partial x_k} = 0$$

Odgovarajuće srednje vrednosti koje se odnose na interval vremena 2τ označene su crticom. Pošto su relativne promene gustine u poređenju sa relativnim promenama brzine vetra u svakom slučaju malene i to prema B. Th. Hesselberg-u i E. Björkdalu (1929) 1000 do 10 000 puta manje, to možemo pisati

$$(3) \qquad \overline{\varrho u_i u_k} = \bar{\varrho}\, \overline{u_i u_k} \quad \text{i} \quad \overline{\varrho u_k} = \bar{\varrho}\, \bar{u}_k$$

Ako pišemo dalje

$$(4) \qquad u_i^{\lambda} = \bar{u}_i + \zeta_i^{\lambda}$$

gde je u_i^{λ} brzina a ζ_i^{λ} otstupanje brzine λ-tog delića od prosečne brzine $\bar{u}_i$ tako da je

$$(5) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} \zeta_i^{\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{n} \zeta_k^{\lambda} = 0$$

onda je

$$(6) \qquad \overline{u_i u_k} = \frac{1}{n}\sum(\bar{u}_i + \zeta_i^{\lambda})(\bar{u}_k + \zeta_k^{\lambda}) = \bar{u}_i\bar{u}_k + \overline{\zeta_i \zeta_k}$$

Ako sada jednačine (3) i (6) kao i jednačinu kontinuiteta (2) uzmemo u jednačini (1) u obzir, dobijamo odmah jednačinu za ujednačena kretanja

$$(7) \qquad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_k\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + 2\omega_{ik}\bar{u}_k = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{1}{\bar{\varrho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\bar{\varrho}}\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$$

gde je

(8) $$T_{ik} = T_{ki} = \bar{\varrho}\,\overline{\zeta_i \zeta_k}$$

simetrični tenzor koji po svojoj konstrukciji potseća na tenzor impulsa struje 8 (9).

Dobivena jednačina za ujednačena kretanja u svemu potseća na Euler- ovu jednačinu kretanja hidrodinamike (8 (1^b) u vezi sa 8 (4^b)) za kretanje vazduha bez trenja. Od one se razlikuje po obliku samo zbog člana

(9) $$R_i = -\frac{1}{\bar{\varrho}} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$$

koji je posledica mešanja vazduha i znači ustvari neku silu,tj. silu virtuelnog (efektivnog) unutrašnjeg trenja.

Turbulentnost vazduha zavisi od "komponenata turbulentne dodatne brzine"

$$\zeta_i^{\lambda} = u_i^{\lambda} - \bar{u}_i$$

Možemo smatrati da je delić λ došao sa drugog mesta gde je bila srednja brzina druga nego što je na mestu gde se trenutno on nalazi. Pošto se u pravcu tog puta ξ_j^{λ}, koji smatramo ovde pravim i na kome je došlo do promene brzine delića u odnosu na okolni vazduh za $u_i^{\lambda} - \bar{u}_i$, srednji vektor brzine (u prvoj aproksimaciji) promeni za

$$\bar{u}_i - u_{i\,\circ}^{\lambda} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \xi_j^{\lambda}$$

to možemo pisati

$$\zeta_i^{\lambda} = -\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \xi_j^{\lambda}$$

i zbog toga mesto (8)

(10) $$T_{ik} = \bar{\varrho}\,\overline{\zeta_i \zeta_k} = -\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \eta_{jk}$$

gde je

(11) $$\eta_{jk} = \bar{\varrho}\,\overline{\xi_j \zeta_k}$$

tzv. tenzor razmene koji je, kao što se može pokazati, simetričan.

Ako uzmemo vrednost (10) u jedn. (7) u obzir, dobijamo konačno opštu jednačinu za turbulentno strujanje vazduha u atmosferi

(12) $$\frac{d\bar{u}_i}{dt} + 2\omega_{ik}\bar{u}_k = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{1}{\bar{\varrho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\bar{\varrho}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right)$$

Kod izvođenja ove jednačine polazili smo od pretpostavke da se vazduh kreće u otsustvu sila unutrašnjeg trenja, tj. trenja koje je posledica prenošenja impulsa samo sa molekula na molekul a ne sa delića na delić. To smo mogli da uradimo, pošto je unutrašnje trenje vazduha u poređenju sa ostalim silama zanemarljivo malo. To molekulsko unutrašnje trenje u vazduhu je dakle za di-

namiku atmosfere beznačajno. Mesto njega se javlja virtuelno (efektivno) unutrašnje trenje koje je od vanrednog značaja za atmosfersku dinamiku a koje se odnosi samo na ujednačena kretanja. Vazduh u atmosferi kreće se prema tome, gledano iz daleka, kao tečnost sa unutrašnjim trenjem a gledano iz bliza kao potpuna tečnost. Koliko je unutrašnje trenje u poređenju sa efektivnim unutrašnjim trenjem vidićemo kasnije.

III. VAZDUH I OSNOVNI PRINCIPI TERMODINAMIKE

1. Prvi princip termodinamike

Od naročitog značaja za proučavanje termodinamike i dinamike atmosfere je poznavanje kako se u atmosferi toplotna energija pretvara u razne druge vrste energije, prvenstveno u kinetičku energiju vetrova. Već od Robert Mayer-a (1842) i James Prescott Joule-a (1843) je poznato da postoji između rada, upotrebljenog za zagrevanje nekog tela, i pojavljene toplote neki tačno određeni odnos. Helmholtz je ove rezultate proširio i dao (1847) poznatu formulaciju zakona o održanju energije:

Kod svih promena koje se odigravaju u zatvorenom sistemu ostaje ukupna energija sistema konstantna.

Ovde se pod zatvorenim sistemom podrazumeva sistem, napr. vazduh, koji niti daje niti prima toplotu ili neku drugu vrstu energije. Ukoliko se dakle u zatvorenom sistemu u jednom delu energija povećava, se u preostalom delu u jednakom iznosu smanjuje. U otvorenom sistemu se preko njegove granične površine vrši razmena energije.

U termodinamici se proučavaju razmene energije između sistema i okolne sredine koje su izazvane dovođenjem i odvođenjem toplote i menjanjem zapremine sistema. Ove razmene vrše se u saglasnosti sa zakonom o održanju energije. Taj zakon nas u termodinamici vodi do jedne od osnovnih jednačina dinamičke meteorologije koja izražava prvi princip termodinamike.

Pod pretpostavkom da do promene dE_M energetskog stanja (ukupne sadržine energije) sistema mase M dođe samo zbog dovođenja i odvođenja toplote dQ_M (kod odvođenja $dQ_M < 0$) i radom dW_M koji okolna sredina vrši prilikom menjanja zapremine sistema (kada vrši rad sistem je $dW < 0$) u saglasnosti sa prvim principom termodinamike važi

(1) $$dE_M = dQ_M + dW_M$$

Promena dE_M pretstavlja zbir svih promena raznih vrsta energije koje se za vreme dovođenja toplote u sistemu pojave. Tako može doći do promene kinetičke energije K_M, potencijalne energije zemljine teže $\emptyset_M$, unutrašnje energije U_M i drugih vrsta energije sistema. Pošto su druge vrste energije za dinamiku atmosfere beznačajne, to ih možemo zanemariti i pisati

(2) $$dE_M = dK_M + d\emptyset_M + dU_M$$

Kinetička i potencijalna energija teže su mehaničke energije i do promena tih energija može doći mehaničkim dejstvom raznih sila. I do promene unutrašnje energije može doći mehaničkim dejstvom sila a pored toga i zbog dovođenja i odvođenja toplote. Kao što je poznato je unutrašnja energija tela jednaka ukupnoj kinetičkoj energiji neuređenog kretanja svih molekula u telu zajedno sa ukupnom unutrašnjom potencijalnom energijom koja zbog dejstva međumolekulskih (kohezionih) sila molekula u telu postoji. Zbog unutrašnje energije koje telo sadrži osećamo da je telo

toplo ili hladno.

Posmatrani sistem neka bude sada deo atmosfere. U intervalu vremena dt neka se zapremina V tog vazduha promeni za dV. Do promene je došlo zbog menjanja položaja njegove granične površine u prostoru. Ako posmatramo pomeranje jednog, inače makog, elementa $d\sigma$ te površine σ koje se svakako vrši zajedno sa vazduhom, onda vidimo da samo zbog pomeranja tog elementa površine okolna atmosfera izvrši u elementarnom intervalu vremena dt rad

$$dW_{M\,d\sigma} = -(p\,d\sigma)\vec{u}\cdot\vec{n}\,dt$$

gde su p i $\vec{u}$ pritisak i vektor brzine na onom mestu a $\vec{n}$ ort u pravcu spoljašnje normale na element površine $d\sigma$.

Integralenjem preko cele granične površine σ posmatranog vazduha dobijamo da je rad koji u intervalu vremena dt zbog dejstva sila pritiska izvrši okolna sredina

(3) $$dW_M = -\int_{\sigma}(p\vec{u})\cdot\vec{n}\,d\sigma\,dt$$

Pošto je prema Gaussovom stavu površinski integral normalne komponente vektora na graničnu površinu jednak zapreminskom integralu iz divergencije vektora, to mesto jedn. (3) možemo pisati

(4) $$dW_M = -\int_{V}\nabla\cdot(p\vec{u})\,dV\,dt$$

Ako posmatrani vazduh pretstavlja srazmerno mali delić vazduha, onda možemo funkciju $\nabla\cdot(p\vec{u})$ pisati ispred znaka za integralenje, tako da je

(5) $$\begin{aligned} dW_M &= -\nabla\cdot(p\vec{u})\,V\,dt = \\ &= -(\nabla p\cdot\vec{u} + p\nabla\cdot\vec{u})\,V\,dt \end{aligned}$$

Unošenjem dobivene vrednosti u jedn. (1) kad uzmemo u obzir jedn. (2) dobijamo

(6) $$dK_M + d\emptyset_M + dU_M = dQ_M - (\nabla p\cdot\vec{u} + p\nabla\cdot\vec{u})\,V\,dt$$

Na drugoj strani dobijamo množenjem hidrodinamičke jednačine kretanja II 6 (3) skalarno vektorom $M\vec{u}dt$ <u>jednačinu za kinetičku energiju delića</u> mase M

(7) $$dK_M = -d\emptyset_M - V\nabla p\cdot\vec{u}\,dt$$

gde smo uzeli u obzir da su

(8) $$dK_M = M\,\dot{\vec{u}}\cdot\vec{u}\,dt = M\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{2}\right)dt \quad \text{i} \quad d\emptyset_M = M\,\nabla\emptyset\cdot\vec{u}\,dt$$

Zbog neznatnosti uticaja, sile trenja ovde nismo uzeli u obzir. Upoređenjem dobivene vrednosti sa jedn. (6), dobijamo <u>jednačinu za dovedenu toplotu</u>

(9) $$dU_M = dQ_M - p\,dV$$

gde smo uzeli još u obzir da je prema jednačini kontinuiteta

(10) $$V\,\nabla\cdot\vec{u}\,dt = V\frac{d\alpha}{\alpha} = M\,d\alpha = dV$$

Dobivena jednačina (9) izražava prvi princip termodinamike. To je jedna od osnovnih jednačina termodinamike sa svestranom primenom.

Unutrašnja energija vazduha i makog tela može se menjati iz dva sasvim različita uzroka (9): ili dovođenjem i odvođenjem toplote ili menjanjem njegove zapremine pod dejstvom sila pritiska. Promene prve vrste (kada je $dV = 0$) zovu se izosterske a one druge vrste ($dQ = 0$) adijabatske.

Velika je primena enthalpije, tj. Gibbsove toplotne funkcije (termičkog potencijala) u meteorologiji. Prema definiciji ima vazduh mase M enthalpiju

(11) $$H_M = U_M + pV$$

Kad uzmemo u obzir jedn. (9) vidimo da se enthalpija može menjati zbog dovođenja toplote i zbog menjanja pritiska:

(12) $$dH_M = dU_M + d(pV) = dQ_M + V\,dp$$

Ovde smo smatrali da je masa M srazmerno mala. Ako su U i H unutrašnja energija odn. enthalpija jedinice mase, tj. specifična unutrašnja energija odn. specifična enthalpija vazduha, onda je očigledno

(13) $$U_M = MU \quad \text{i} \quad H_M = MH$$

Jedna i druga veličina je srazmerna masi. Zbog toga su one veličine kvantiteta. Za razliku od toga su veličine p, T itd veličine intenziteta.

2. Drugi princip termodinamike

Iz iskustva je poznato da toplota nikada ne može sama od sebe, to znači bez spoljašnjih uticaja, preći sa hladnijeg na toplije telo. Nikada ne mogu same od sebe da se pojave u ravnomerno zagrejanom telu temperaturske razlike (Clausius, 1850). Ne može se dakle samo od sebe pojaviti neko smanjenje toplotne (unutrašnje) energije koja bi se, vršeći rad, pretvarala u neku drugu vrstu energije. Unutrašnja energija može se pretvoriti u mehaničku energiju samo pod uslovom da u sistemu u kome se ovo pretvaranje vrši postoje razlike u temperaturi. Prilikom ovakvog pretvaranja uvek jedan deo unutrašnje energije, neiskorišćen za rad, prelazi sa toplijeg na hladnije mesto. "Perpetuum mobile druge vrste" je nemoguć, što znači da je nemoguće konstruisati mašinu koja bi iz rezervoara toplote, svuda jednako zagrejanog (napr. iz mora), oduzimala toplotu (unutrašnju energiju) i istu upotrebila za vršenje rada.

Prema Clausius-u postoji u prirodi neka veličina koja se prilikom svih ireverzibilnih (nepovratnih) promena unutar zatvorenog sistema, tj. sistema koji niti daje niti prima toplotu, povećava a kod svih reverzibilnih (povratnih) promena ostaje konstantna. Ova veličina S_M zove se entropija. I ona je, slično kao unutrašnja energija i enthalpija, veličina kvantiteta, tako da možemo pisati

(1) $$S_M = M\,S$$

(S = entropija jedinice mase = specifična entropija).

Prema drugom principu termodinamike prilikom reverzibilnog dovođenja toplote dQ entropija S_M promeni se za

(2) $$dS_M = \frac{dQ}{T} = \frac{dU_M + p\,dV}{T} = \frac{dH_M - V\,dp}{T}$$

3. Jednačina stanja suvog vazduha

Unutrašnja energija, enthalpija i entropija vazduha funkcije su veličina stanja p, ϱ i T. Ali sve ove veličine intenziteta nisu nezavisne jedna od druge.

Za svaki sastojak suvog vazduha (vazduh koji ne sadrži vodenu paru) važi sa dovoljnom tačnošću jednačina gasnog stanja

(1) $$p_i = R_i \varrho_i T_i \qquad \text{ili} \qquad p_i \alpha_i = R_i T_i$$

gde je R_i Clausiusova ili individualna gasna konstanta i-tog sastojka. Individualnu gasnu konstantu za svaki sastojak možemo naći iz unuverzalne gasne konstante

(2) $$R_o = 8313\ m^2 sec^{-2} grad^{-1}$$

i molekulske težine μ_i, pošto je

(3) $$R_o = \mu_i R_i$$

U suvom vazduhu mase m_s i zapremine V molekuli pojedinih sastojaka međusobno potpuno su izmešani. Svaki sastojak zaprema prema tome zapreminu V i kada bi makoji, napr. i-ti, sastojak bio na onom mestu sam, nalazio bi se pri temperaturi

(4) $$T = T_i$$

koja je jednaka za sve sastojke, pod nekim manjim pritiskom p_i. Na drugoj strani možemo zamisliti da mogu svi molekuli tog sastojka biti skupljeni na jednom mestu i da se pri tome, odvojeni od ostalog vazduha, nalaze u nekoj zapremini V_i ($V_i < V$) u kojoj se ta i-ti sastojak pri temperaturi T nalazi pod pritiskom p_s suvog vazduha. Uzimajući u obzir jednu i drugu tačku gledišta dobijamo iz jedn. (1)

(5) $$p_i V = m_i R_i T \qquad \text{i} \qquad p_s V_i = m_i R_i T$$

(m_i = masa i-tog sastojka koja se nalazi u zapremini V odn. V_i) gde smo uzeli u obzir da je prema definiciji gustine u prvom slučaju gustina jednaka količniku $m_i:V$ a u drugom količniku $m_i:V_i$. Iz jedne i druge jednačine dobijamo, kada uzmemo u obzir da je u donjem delu atmosfere $V_i:V$ konstantno (tablica na str. 1),

(6) $$p_i : p_s = V_i : V = \text{const.}$$

Kad saberemo sve takve jednačine dobijamo

(7) $$\sum p_i = p_s$$

gde smo uzeli u obzir da je

(8) $$\sum V_i = V$$

(znak za sabiranje odnosi se na sve sastojke suvog vazduha). Vazdušni pritisak p_s jednak je dakle zbiru parcijalnih pritisaka p_i svih delova vazduha (Dalton-ov zakon).

Uzimajući u obzir jedn. (1) i (7) vidimo da za suvi vazduh važi

(9) $$p_s = T\sum R_i\varrho_i$$

Množenjem i delenjem desne strane sa gustinom suvog vazduha

(10) $$\varrho_s = \sum \varrho_i$$

dobijamo

(11) $$p_s = R_s\varrho_s T \qquad \text{ili} \qquad p_s\alpha_s = R_s T$$

(α_s = specifična zapremina suvog vazduha) gde je

$$R_s = \sum R_i \frac{\varrho_i}{\varrho_s}$$

Da bismo našli vrednost R_s pomoću vrednosti koje su date u tablici na str. 1 pišemo najpre jedn. (11) u obliku

(12) $$p_s V = m_s R_s T$$

gde je

(13) $$m_s = \sum m_i$$

masa suvog vazduha koja se nalazi u zapremini V. Pomoću dobivene jedn. (12) i jedn. (5) i (6) dobijamo odmah

$$m_i = m_s \frac{R_s}{R_i}\frac{V_i}{V} \qquad \text{ili} \qquad m_i R_i = m_s R_s \frac{V_i}{V}$$

Sabiranjem analognih jednačina koje se odnose na sve sastojke suvog vazduha zapremine V, dobijamo, kad uzmemo još u obzir jedn.(3), (8) i (13)

$$R_s = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_i}\frac{V_i}{V}} = \frac{R_0}{\sum \mu_i \frac{V_i}{V}} \quad \text{ili} \sum m_i R_i = m_s R_s$$

Upoređenjem dobivene vrednosti sa jedn. (6) vidimo da je R_s neka konstanta i kad uzmemo u obzir jedn. (2) i vrednosti iz pomenute tablice, dobijamo

(14) $$R_s = 287{,}04 \ m^2 sec^{-2} grad^{-1}$$

Ova vrednost se zove (individualna) gasna konstanta za suvi vazduh.

4. Jednačina stanja vodene pare i vlažnog vazduha

Za razliku od suvog vazduha vodena para se u atmosferi pretvara u tečno i čvrsto stanje.

Zamislimo da se vodena para nalazi iznad čiste vode sa ravnom površinom. Između vodene pare i vode postoji stalna razmena materije: iz vode ulaze molekuli u gornji prostor gde se nalazi vodena para, a iz vodene pare ulaze molekuli u vodu. Ako se iznad vode ne nalazi ništa drugo sem vodena para i možda još čisti vazduh, onda je u slučaju kada je vodena para zasićena, (tj. tada kada iz vode izlazi onoliko molekula vode koliko ih jednovremeno ulazi iz vodene pare u vodu) pritisak vodene pare $e = e_w$ samo funkcija temperature:

$$e_w = e_w(T)$$

Ovaj pritisak vodene pare zove se pritisak zasićene vodene pare ili maksimalni pritisak vodene pare za temperaturu T. Ovako se zove, iako može pri makojoj temperaturi pritisak vodene pare pod izvesnim uslovima, kao što ćemo da vidimo kasnije, da bude veći dva, tri i više puta od pritiska zasićene vodene pare e_w.

Ako je pri temperaturi T stvarni pritisak vodene pare e veći ili manji od pritiska zasićene vodene pare pri dotičnoj temperaturi, onda kažemo da je vodena para prezasićena (prostor ili vazduh je prezasićen vodenom parom) odn. da nije zasićena (prostor ili vazduh vodenom parom nije zasićen).

Pri temperaturama manjim od 0^oC nije svejedno da li se prostor graniči sa prehlađenom vodom ili ledom. Tamo postoje dve mogućnosti: zasićenost vodene pare u odnosu na (prehlađenu) vodu i u odnosu na led. Prvi e_{wa} je, sem pri 0^oC, veći od drugog e_{wl}. Pri temperaturi 0^oC obe vrednosti su međusobno jednake. Kako zavisi pritisak zasićene vodene pare od temperature videćemo kasnije.

Iako ima vodena para pri atmosferskim temperaturama tačku kondenzacije T_d (= temperatura pri kojoj bi pri datoj sadržini vodene pare u vazduhu stvarni-parcijalni-pritisak vodene pare e bio jednak maksimalnom $e = e_w(T_d)$) pri makojoj temperaturi, možemo u saglasnosti sa merenjima i nju smatrati u dobroj aproksimaciji kao potpun gas sa jednačinom

(1) $$e = R_v \varrho_v T \qquad \text{ili} \qquad e\alpha_v = R_v T$$

gde je ϱ_v gustina, α_v specifična zapremina i

(2) $$R_v = 461{,}50\ m^2sec^{-2}grad^{-1} = 1{,}608\ R_s$$

gasna konstanta vodene pare. Ovo potvrđuju merenja i posmatranja, a može se objasniti time da u prostoru gde se nalazi samo vodena para pritisak e_w još iz daleka ne pretstavlja najveći mogući pritisak, kao što je to bio slučaj kod ravnoteže sa čistom vodom

sa kojom se vodena para graniči preko ravne granične površine.

Pomoću jednačine stanja vodene pare i jednačine stanja za suvi vazduh nalazimo jednačinu stanja vlažnog vazduha. Vlažan vazduh je smesa suvog vazduha i vodene pare tako da je gustina vlažnog vazduha ϱ jednaka zbiru iz gustine prisutnog suvog vazduha ϱ_s i gustine prisutne vodene pare ϱ_v (3 (10)):

(3) $$\varrho = \varrho_s + \varrho_v$$

Slično je u saglasnosti sa Daltonovim zakonom pritisak vlažnog vazduha p jednak zbiru iz parcijalnog pritiska suvog vazduha p_s i parcijalnog pritiska vodene pare e, tako da je u saglasnosti sa jedn. 3 (7), 3 (11) i (1)

(4) $$p = p_s + e = R_s\varrho_s T + R_v\varrho_v T$$

što daje <u>jednačinu stanja vlažnog vazduha</u>

(5) $$p = R\varrho T \qquad \text{ili} \qquad p\alpha = RT$$

gde je α specifična zapremina vlažnog vazduha a R je vrednost koja je određena jednačinom

(6) $$R\varrho = R_s\varrho_s + R_v\varrho_v$$

Pošto je

$$R\varrho = R_s\varrho_s + R_s\varrho_v + (R_v - R_s)\varrho_v$$

to odavde, kad uzmemo u obzir jedn. (3) i (2), dobijamo odmah

(7) $$R = R_s + (R_v - R_s)q = R_s(1 + 0,608q)$$

gde je

(8) $$q = \frac{\varrho_v}{\varrho} = \frac{m_v}{m}$$

<u>specifična vlažnost vlažnog vazduha</u>. (m_v = masa vodene pare u srazmerno maloj masi m vlažnog vazduha). Vrednost R zove se <u>gasna konstanta vlažnog vazduha</u> koja je konstantna za vazduh u kome je odnos između mase vodene pare i ukupne mase konstantan.

U dinamičkoj meteorologiji često nastupaju sledeće veličine

$$\lambda = R_v:R_s = 1,608$$
$$1:\lambda = R_s:R_v = 0,622$$
$$\lambda - 1 = (R_v - R_s):R_s = 0,608$$
$$1:(\lambda - 1) = R_s:(R_v - R_s) = 1,64$$
$$(\lambda - 1):\lambda = (R_v - R_s):R_v = 0,378$$
$$\lambda: (\lambda - 1) = R_v: (R_v - R_s) = 2,645$$

Međusobnim upoređenjem jednačina 3 (11), (5) i (7) vidimo da je suvi vazduh koji je pod jednakim pritiskom i ima jednaku tempe-

raturu kao vlažan vazduh gušći od vlažnog. Pod ovim uslovima je

$$\rho_s = \frac{R}{R_s}\rho = (1 + 0{,}608q)\rho$$

Da bi bila pri jednakom pritisku gustina suvog vazduha jednaka gustini vlažnog vazduha ($\rho = \rho_s$), treba da bude prema tome temperatura T_v suvog vazduha veća od temperature T vlažnog vazduha. Ta temperatura T_v zove se prema Guldberg-u i Mohn-u (1877) virtuelna temperatura vazduha. U saglasnosti sa jedn. 3 (11), (5) i (7) je

(9) $$\boxed{T_v = (1 + 0{,}608q)T}$$

Uzimajući u obzir ovu definiciju možemo jednačinu stanja (5) pisati i u obliku

(10) $$p = R_s\rho T_v \quad \text{ili} \quad p\alpha = R_s T_v$$

Ako suvi vazduh mase m_s i vodena para mase m_v sačinjavaju vlažan vazduh, onda je

(11) $$m = m_s + m_v$$

masa tog vazduha, a

(12) $$\rho_s = \frac{m_s}{V}, \rho_v = \frac{m_v}{V} \quad i \quad \rho = \frac{m}{V}$$

gustina suvog vazduha, vodene pare odn. vlažnog vazduha (V = zapremina tog vlažnog vazduha). Ako sada poslednju jedn. (12) uzmemo u jedn. (5) u obzir dobijamo sledeći oblik jednačine stanja vlažnog vazduha

(13) $$pV = mRT$$

gde je slično kao kod suvog vazduha ((6) i (12))

(14) $$mR = m_sR_s + m_vR_v$$

Masa m delića vlažnog vazduha može se u toku vremena menjati i to zbog kondenzacije prisutne vodene pare mase m_v, zbog isparavanja vode koja se možda u tečnom ili čvrstom stanju u tom deliću nalazi, ili zbog difuzije vodene pare preko granične površine posmatranog delića u okolnu atmosferu ili u delić. Masa suvog vazduha se pri tome, svakako, ništa ne menja i ukupna promena mase dm posmatranog delića jednaka je promeni dm_v mase vodene pare koja se u deliću nalazi:

(15) $$dm = dm_v$$

Jednovremeno može doći i do promena dp, $d\rho$, dT i dq pritiska, gustine, temperature i specifične vlažnosti vazduha.

Diferenciranjem jednačine stanja (13), kad uzmemo u obzir da je prema jedn. (14) i (15)

$$d(mR) = R_v dm$$

dobijamo diferencijalni oblik jednačine stanja

(16) $$pdV + Vdp = mRdT + R_vTdm$$

Odmah možemo da nađemo i diferencijalni oblik jednačine stanja napisane u obliku (5). Diferenciranjem ove jednačine, kad uzmemo u obzir jedn. (7), dobijamo

(17) $$dp = RTd\rho + R\rho dT + \rho T(R_v - R_s)dq \quad \text{ili}$$
$$pd\alpha + \alpha dp = RdT + T(R_v - R_s)dq$$

Kod suvog vazduha, gde je $q = 0$ i $R = R_s$, diferencijalni oblik jednačine stanja glasi

(18) $$pd\alpha + \alpha dp = R_s dT \quad \text{ili} \quad dp = R_s Td\rho + R_s \rho dT$$

Slično dobijamo za vodenu paru

(19) $$ed\alpha_v + \alpha_v de = R_v dT \quad \text{ili} \quad de = R_v Td\rho_v + R_v \rho_v dT$$

5. Specifična toplota vazduha

Toplota koja treba da se dovede jedinici mase vazduha da se pri tome temperatura poveća za 1° zove se specifična toplota. Ali dovođenje toplote može se izvršiti pod raznim uslovima. Tako govorimo o specifičnoj toploti vazduha pri konstantnom pritisku (c_p) i pri konstantnoj zapremini - gustini (c_v). U ova dva slučaja misli se na toplotu koju treba dovesti pod uslovom da se za vreme dovođenja pritisak odn. njegova zapremina (gustina) ne menja.

Vlažan vazduh mase m je smesa suvog vazduha mase m_s i vodene pare mase m_v. Ako su specifične toplote suvog vazduha i vodene pare pri konstantnom pritisku c_{ps} i c_{pv} i pri konstantnoj zapremini c_{vs} i c_{vv}, onda je očigledno

(1) $$mc_p = m_s c_{ps} + m_v c_{pv} \quad \text{i} \quad mc_v = m_s c_{vs} + m_v c_{vv}$$

Makoja od ovih specifičnih toplota suvog vazduha i vodene pare praktično je pri temperaturama koje posmatramo u atmosferi od temperature nezavisna. Tako je

$$c_{ps} = 0{,}2405 \text{ i } 0{,}2415 \text{ kcal kg}^{-1}\text{grad}^{-1} \text{ za } t = 0 \text{ odn. } 100^\circ\text{C i}$$
$$c_{vs} = 0{,}1719 \text{ i } 0{,}1726 \text{ kcal kg}^{-1}\text{grad}^{-1} \text{ za } t = 0 \text{ odn. } 100^\circ\text{C.}$$

Pri temperaturi 0°C je $c_{pv} = 0{,}444$ i $c_{vv} = 0{,}334$ kcal kg^{-1}grad^{-1}.

Specifična toplota pri konstantnom pritisku uvek je veća od specifične toplote pri konstantnoj zapremini. Kod potpunog gasa veća je baš za toliko koliko se energije utroši za rad koji izvrši gas jedinice mase prilikom povećanja temperature za jedinicu zbog jednovremenog povećanja zapremine pod konstantnim spoljašnjim pritiskom. Tako npr. za suvi vazduh važi

$$c_{ps} - c_{vs} \text{ kcal} = p(\alpha_1 - \alpha) \text{ kg m}^2\text{sec}^{-2}$$

(α_1, α = specifična zapremina suvog vazduha posle i pre povećanja temperature pri konstantnom pritisku za 1°). Ako uzmemo u obzir jednačinu stanja suvog vazduha, onda mesto desne strane možemo pisati $R_s$kg m^{2}sec^{-2}, tako da je

(2) $$\frac{c_{ps} - c_{vs}}{R_s} = A$$

gde je

$$A = \frac{0{,}2405 - 0{,}1719 \text{ kcal kg}^{-1}\text{grad}^{-1}}{287{,}04 \text{ m}^2\text{sec}^{-2}\text{grad}^{-1}} = \frac{1}{4190} \text{ kcal kg}^{-1}\text{m}^{-2}\text{sec}^2$$

(vrednosti za specifične toplote odnose se na $t = 0^oC$). Tačna vrednost za A, tj. za toplotni ekvivalent rada, je

(3) $$A = \frac{1}{4186{,}8} \text{ kcal kg}^{-1}\text{m}^{-2}\text{sec}^2 = \frac{1}{427} \text{ kcal/m kp}$$

Vidimo da možemo i toplotnu (unutrašnju) energiju izražavati u mehaničkim jedinicama, uzimajući u obzir toplotni ekvivalenat rada koji kaže da je

$$1 \text{ kcal} = 4186{,}8 \text{ kg m}^2\text{sec}^{-2} = 427 \text{ m kp}$$

Ako izražavamo i toplotnu (unutrašnju) energiju u mehaničkim jedinicama, onda u jednačini (2) A treba zameniti jedinicom, tako da je u našem kg-m-sec sistemu

(4) $$R_s = c_{ps} - c_{vs}$$

Slično je

(5) $$R_v = c_{pv} - c_{vv} \qquad \text{i} \qquad R = c_p - c_v$$

Specifična toplota vlažnog vazduha ne razlikuje se mnogo od specifične toplote suvog vazduha.

Ako delimo jedn. (1) sa m i uzmemo u obzir definiciju za specifičnu vlažnost dobijamo

(6) $$c_p = (1 - q)c_{ps} + qc_{pv} \qquad \text{i} \qquad c_v = (1 - q)c_{vs} + q\,c_{vv}$$

Pošto je u atmosferi q, kao što ćemo videti kasnije, uglavnom manje od 0,01 kg/kg, to vidimo da se specifična toplota vlažnog vazduha stvarno ne razlikuje mnogo od specifične toplote suvog vazduha.

Često se u dinamičkoj meteorologiji javljaju sledeće vrednosti:

(7)
$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}40$$
$$\frac{1}{\kappa} = \frac{c_v}{c_p} = 0{,}71$$
$$\kappa - 1 = \frac{c_p - c_v}{c_v} = \frac{R}{c_v} = 0{,}40$$
$$\frac{1}{\kappa - 1} = \frac{c_v}{c_p - c_v} = \frac{c_v}{R} = 2{,}5$$
$$\frac{\kappa - 1}{\kappa} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = \frac{R}{c_p} = 0{,}29$$
$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} = \frac{c_p}{c_p - c_v} = \frac{c_p}{R} = 3{,}5$$

6. Toplota isparavanja vode

Za isparavanje svakog tela potrebna je toplota. Toplota koju treba dovesti vodi da ispari a da se pri tome temperatura ne menja zove se toplota isparavanja vode. Glavni deo toplote koja se dovodi za isparavanje vode troši se za savlađivanje intermolekulskih (kohezionih) sila prilikom povećavanja otstojanja molekula a preostali deo za vršenje rada prilikom povećavanja zapremine vode pod spoljašnjim pritiskom. Prema tome toplota isparavanja L_{av} koju treba dovesti jedinici mase vode (specifična toplota isparavanja) sastoji se iz dva dela: iz unutrašnje L_{avu} i spoljašnje specifične toplote isparavanja L_{avs}, tako da je

(1) $$L_{av} = L_{avu} + L_{avs}$$

U saglasnosti sa prvim principom termodinamike deo L_{avs} odlazi u okolnu sredinu a deo L_{avu} odražuje se u povećanju unutrašnje energije vode jedinice mase pretvorene u vodenu paru, tj. u povećanju unutrašnje potencijalne energije vode jedinice mase. Vidimo da je unutrašnja energija U_v vodene pare jedinice mase za L_{avu} veća od unutrašnje energije U_a vode jednake mase i temperature:

(2) $$U_v = U_a + L_{avu}$$

Slično kao za isparavanje potrebna je i za topljenje leda toplota - toplota topljenja. I toplota topljenja sastoji se iz dva dela: iz unutrašnje i spoljašnje toplote topljenja, tako da je

(3) $$L_{la} = L_{lau} + L_{las}$$

(L_{la}, L_{lau}, L_{las} = specifična ukupna, unutrašnja odn. spoljašnja toplota topljenja). Pošto je specifična zapremina leda veća (otprilike za jednu devetinu) od specifične zapremine vode, to je spoljašnja toplota leda negativna.

Slično kao voda, isparava i led. I za isparavanje leda potrebna je toplota: toplota isparavanja leda L_{lv} koja se sastoji iz dva dela iz unutrašnje (L_{lvu}) i spoljašnje (L_{lvs}), tako da je

(4) $$L_{lv} = L_{lvu} + L_{lvs}$$

Prema merenjima je pri temperaturi $t = 0^oC$: $L_{lv} = 676,9$ kcal/kg, $L_{av} = 597,3$ kcal/kg i $L_{la} = 79,63$ kcal/kg. Očigledno je

(5) $$L_{lv} = L_{la} + L_{av}$$

Toplota isparavanja vode i toplota topljenja leda od vanrednog su značaja za atmosfersku dinamiku. One pretstavljaju vrlo velike vrednosti i veće su od odgovarajućih toplota drugih poznatih materija.

Unutrašnja toplota isparavanja mnogo je veća od spoljašnje. To nije teško pokazati:

Voda mase m_a neka pri temperaturi T i pritisku p ispari. Voda koja je isparila neka se nalazi u zapremini V_1 i to zajedno sa pre prisutnim vazduhom mase m. Taj vazduh nalazio se na početku, pre nego što je počela posmatrana voda da isparava, u nekoj manjoj zapremini V i zajedno sa posmatranom vodom zapremao je očigledno prostor $V + m_a\alpha_a$ (α_a = specifična zapremina vode). Za povećanje te zapremine bilo je potrebno izvršiti rad $p(V_1 - V - m_a\alpha_a)$ koji je prema definiciji jednak spoljašnjoj toploti isparavanja vode mase m_a koja se nalazi u vazduhu:

(6) $$m_a L_{avs} = p(V_1 - V - m_a\alpha_a)$$

Odavde dobijamo, kad uzmemo u obzir jednačinu stanja vlažnog vazduha,

$$m_a L_{avs} = \left[m_s R_s + (m_v + m_a)R_v\right]T - (m_s R_s + m_v R_v)T - pm_a\alpha_a$$

što nam odmah daje specifičnu toplotu isparavanja vode

(7) $$\boxed{L_{avs} = R_v T - p\alpha_a}$$

Pri temperaturi T = 273° i pritisku p = 1000 mb je

$$L_{avs} = 461{,}5 \cdot 273 - 1000 \cdot 100 \cdot 10^{-3}\ \text{kg m}^{-1}\text{sec}^{-2}/\text{kg m}^{-3} = 30\ \text{kcal/kg}$$

Pri toj temperaturi spoljašnja toplota isparavanja iznosi 5,4% od ukupne toplote isparavanja L_{av}.

Drugi član na desnoj strani jedn. (7) je u poređenju sa prvim vrlo mali, tako da se spoljašnja toplota isparavanja vode sa temperaturom praktično linearno povećava. Od čega zavisi unutrašnja toplota isparavanja vode videćemo kasnije.

Kao što je za isparavanje vode i leda i za topljenje leda i snega potrebna toplota, tako se prilikom kondenzacije (pretvaranja vodene pare u tečnu vodu), sublimacije (pretvaranja vodene pare u led) i smrzavanja iz vode koja se kondenzuje, koja sublimiše odn. smrzava toplota odvodi u okolinu. Toplota koja se prilikom kondenzacije, sublimacije odn. smrzavanja oslobađa zove se toplota kondenzacije, toplota sublimacije odn. toplota smrzavanja. Po vrednosti ove su toplote jednake toploti isparavanja vode i leda odn. toploti topljenja leda.

7. Unutrašnja energija i enthalpija vazduha i vodene pare

Unutrašnja energija svakog tela funkcija je veličina stanja. Tako unutrašnja energija jedinice mase suvog vazduha zavisi samo od pritiska, temperature i gustine (specifične zapremine). Pošto prema jednačini stanja te veličine nisu nezavisne jedna od druge, to možemo smatrati da je specifična unutrašnja energija U_s suvog vazduha samo funkcija dveju od ovih, napr. od specifične zapremine α i temperature T, da je dakle

$$U_s = U_s(\alpha, T)$$

Ako se prilikom promene temperature T za jedinicu, unutrašnja energija U_s promeni za $\frac{\partial U_s}{\partial T}$ a prilikom promene specifične zapremine

α za jedinicu za $\frac{\partial U_s}{\partial \alpha}$, onda se unutrašnja energija jedinice mase suvog vazduha prilikom promene temperature za dT i specifične zapremine za $d\alpha$ promeni za

(1) $$dU_s = \frac{\partial U_s}{\partial T} dT + \frac{\partial U_s}{\partial \alpha} d\alpha$$

Do promene dU_s može doći na razne načine, ili dovođenjem i odvođenjem toplote ili vršenjem rada pod dejstvom spoljašnjih sila ili zbog jednih i drugih uzroka. Jednake promene dT i $d\alpha$ mogu prema tome da se pojave na razne načine. Pošto kod određenog stanja (p, α) specifična unutrašnja energija suvog vazduha može da bude samo jedna, to znači da dU_s ništa ne zavisi od toga na koji je način došlo do promena dT i $d\alpha$. Diferencijal dU_s je prema tome potpuni diferencijal.

Prema eksperimentima koje su izvršili Gay-Lussac i Joule temperatura suvog vazduha se ne menja ako se njegova zapremina adijabatski na taj način poveća da se gas delom proširi u prostor u kome je bio pre vakuum. Pošto se pri tome unutrašnja energija ništa ne promeni (pri širenju vazduh nije vršio nikakav rad), to znači da je unutrašnja energija suvog vazduha samo funkcija temperature i da, pod uslovom da se temperatura ne menja, od promene zapremine ne zavisi. Za suvi vazduh važi prema tome

(2) $$\frac{\partial U_s}{\partial \alpha} = 0$$

Do promene unutrašnje energije pri konstantnoj zapremini može (u saglasnosti sa jedn. 1 (9)) da dođe samo dovođenjem toplote, tako da $\frac{\partial U_s}{\partial T}$ nije ništa drugo nego specifična toplota c_{vs} suvog vazduha pri konstantnoj zapremini. Kad uzmemo ovo i jedn. (2) u jedn. (1) u obzir, dobijamo

(3) $$dU_s = c_{vs} dT$$

Na makoji način dođe dakle do promene unutrašnje energije suvog vazduha, nju možemo izraziti jednačinom (3), tj. promenom temperature koja se pri tome pojavi.

Integralenjem jedn. (3) dobijamo za specifičnu unutrašnju energiju suvog vazduha

(4) $$U_s = U_{so} + c_{vs}(T - T_o)$$

(U_{so} = specifična unutrašnja energija suvog vazduha pri temperaturi T_o). Prilikom integralenja smatrali smo da možemo smatrati c_{vs} konstantnim.

Na isti način vidimo da je specifična unutrašnja energija vodene pare

(5) $$U_v = U_{vo} + c_{vv}(T - T_o)$$

(U_{vo} = specifična unutrašnja energija vodene pare pri temperaturi T_o). Kao što smo videli, 6 (2), možemo unutrašnju energiju vodene pare izraziti i pomoću unutrašnje energije vode jednake temperature:

Ako zanemarimo stišljivost vode, možemo u saglasnosti sa prvim principom termodinamike za promenu specifične unutrašnje energije vode pisati

(6) $$dU_a = c\,dT$$

(c = specifična toplota vode koja je praktično konstantna), tako da je

(7) $$U_a = U_{ao} + c(T - T_o)$$

(U_{ao} = specifična unutrašnja energija vode pri temperaturi T_o). Prema tome je u saglasnosti sa 6 (2)

(8) $$U_v = U_{ao} + c(T - T_o) + L_{avu}$$

Množenjem jedn. (4) i (5) sa m_s odn. m_v i sabiranjem, a posle delenjem sa $m = m_s + m_v$, kad uzmemo u obzir definiciju za specifičnu toplotu vlažnog vazduha 5 (1), dobijamo za specifičnu unutrašnju energiju vlažnog vazduha

(9) $$U = U_o + c_v(T - T_o)$$

gde je

(10) $$U_o = (m_s U_{so} + m_v U_{vo}):m$$

Poznavanjem unutrašnje energije dobijamo odmah i enthalpiju vazduha i vodene pare.

U saglasnosti sa definicijom enthalpije (1 (11)) i dobivenom jedn. (9), kad uzmemo u obzir jednačinu stanja vazduha i poznatu vezu između specifičnih toplota vazduha 5 (5), dobijamo odmah specifičnu enthalpiju vazduha:

(11) $$H = H_o + c_p(T - T_o)$$

(H_o = specifična enthalpija vazduha pri temperaturi T_o). Specijalno dobijamo odavde za enthalpiju suvog vazduha i vodene pare jedinice mase

(12) $$H_s = H_{so} + c_{ps}(T - T_o)$$
$$H_v = H_{vo} + c_{pv}(T - T_o)$$

(H_{so}, H_{vo} = specifična enthalpija suvog vazduha odn. vodene pare pri temperaturi T_o). Kao unutrašnja energija tako i enthalpija vazduha i vodene pare od pritiska ne zavisi.

8. Entropija vazduha i vodene pare

Za vreme reverzibilnog dovođenja toplote dQ jedinici mase suvog vazduha, njegova entropija se u saglasnosti sa jedn. 2 (2), 7 (12) i jednačinom stanja promeni za

(1) $$dS_s = \frac{dQ}{T} = c_{ps}\frac{dT}{T} - R_s\frac{dp_s}{p_s}$$

Odavde dobijamo integralenjem za specifičnu entropiju suvog vazduha

(2) $$S_s = S_{so} + c_{ps}\ln\frac{T}{T_o} - R_s\ln\frac{p_s}{p_{so}}$$

(S_{so} = specifična entropija suvog vazduha pri stanju T_o, p_{so}). Slično dobijamo za entropiju vodene pare jedinice mase

(3) $$S_v = S_{vo} + c_{pv}\ln\frac{T}{T_o} - R_v\ln\frac{e}{e_o}$$

(S_{vo} = specifična entropija vodene pare pri stanju T_o, e_o). Vidimo da, za razliku od unutrašnje energije i enthalpije, entropija suvog vazduha kao i vodene pare zavise i od pritiska pod kojim se oni nalaze.

Kao što smo mogli unutrašnju energiju vodene pare da izrazimo na dva načina, tako možemo to isto uraditi i sa entropijom, ali samo u slučaju da je vodena para zasićena.

Zamislimo da jedinici mase čiste vode sa ravnom vodenom površinom pri konstantnoj temperaturi dovedemo L_{av} toplote. Zbog dovedene toplote će tačno ukupna količina vode ($m = 1$) ispariti. Ako je bio dovod izvršen reverzibilnim putem, a što je moguće samo pod uslovom da je vodena para iznad vode jednake temperature i da je zasićena, onda je pri tome došlo do povećanja entropije vode S_a za $L_{av}:T$. Prema tome je specifična entropija zasićene vodene pare

(4) $$S_v = S_a + \frac{L_{av}}{T} \qquad (e = e_w)$$

Zbog vrlo male stišljivosti vode, u saglasnosti sa drugim principom termodinamike, entropija vode se promeni prilikom reverzibilnog dovođenja toplote za

(5) $$dS_a = \frac{cdT}{T}$$

(dT = promena temperature do koje dođe zbog dovođenja toplote). Pošto je specifična toplota vode praktično konstantna, to odavde za specifičnu entropiju vode dobijamo

(6) $$S_a = S_{ao} + c\ln\frac{T}{T_o}$$

(S_{ao} = specifična entropija vode pri temperaturi T_o). Prema tome je u saglasnosti sa jedn. (4)

(7) $$S_v = S_{ao} + c\ln\frac{T}{T_o} + \frac{L_{av}}{T}$$

Sličnim postupkom koji nas je doveo do unutrašnje energije vlažnog vazduha, nalazimo specifičnu entropiju vlažnog vazduha:

(8) $$S = S_o + c_p\ln\frac{T}{T_o} - R\ln\frac{p}{p_o}$$

gde smo uzeli u obzir da prilikom menjanja zapremine nezasićenog vlažnog vazduha (q = const) važi u saglasnosti sa jednačinama stanja za vodenu paru, suvi vazduh i vlažan vazduh

(9) $\frac{de}{e} = \frac{dp_s}{p_s} = \frac{dp}{p}$ tj. $\ln\frac{e}{e_o} = \ln\frac{p_s}{p_{so}} = \ln\frac{p}{p_o}$

(S_o = specifična entropija vazduha pri stanju T_o, p_o, $q_o = q$).

Množenjem jedn. (2) i (7) masom m_s suvog vazduha odn. masom m_v vodene pare, dobijamo posle sabiranja konačno entropiju zasićenog vazduha mase m:

(10) $S_m = m_s(S_{so} + c_{ps}\ln\frac{T}{T_o} - R_s\ln\frac{p_s}{p_{so}}) + m_v(S_{ao} + c\ln\frac{T}{T_o} + \frac{L_{av}}{T})$

9. Planck-ova i Clausius-Clapeyron-ova jednačina

U odeljcima 7 i 8 videli smo da možemo kako unutrašnju energiju vodene pare tako i entropiju zasićene vodene pare izraziti na dva načina. Ova činjenica dovodi nas odmah do dve nove jednačine:

Diferenciranjem jednog i drugog oblika jednačine za unutrašnju energiju vodene pare (7 (5) i 7 (8)) i oduzimanjem dobijamo

(1) $$c_{vv}dT = cdT + dL_{avu}$$

Ako uzmemo u obzir definiciju za ukupnu i spoljašnju toplotu isparavanja (6 (1), 6 (7)) kao i odnos između specifičnih toplota i gasne konstante vodene pare (5 (5)), onda odavde dobijamo Planck-ovu jednačinu

(2) $$dL_{av} = -(c - c_{pv})dT - d(p\alpha_a)$$

Jednačina se odnosi na vodenu paru u atmosferi gde je pritisak vazduha p. Analogna jednačina važi i za toplotu isparavanja leda i izvodi se na isti način.

Do Clausius-Clapeyron-ove jednačine dođemo na sličan način. Ona važi za zasićenu vodenu paru pod uslovom da je

(3) $$p = e = e_w$$

da je dakle vodena para u ravnoteži sa čistom vodom sa ravnom površinom. U tom slučaju možemo vodi dovesti toplotu, koja je potrebna za isparavanje, reverzibilnim putem i možemo upotrebiti gore izvedenu jednačinu za entropiju zasićene vodene pare.

Diferenciranjem jednačina 8 (3) i 8 (7) za entropiju vodene pare koju smatramo zasićenom ($e = e_w$) i oduzimanjem, kad uzmemo u obzir Planck-ovu jednačinu (2) i da je α_a praktično konstantno, dobijamo Clausius-Clapeyron-ovu jednačinu:

(4) $$(R_vT - e_w\alpha_a)\frac{de_w}{e_w} = L_{av}\frac{dT}{T}$$

Ovu jednačinu možemo pisati i u obliku

(5) $\frac{de_w}{e_w} = A\frac{dT}{T}$ gde je $A = \frac{L_{av}}{R_vT - e_w\alpha_a} = \frac{L_{av}}{L_{avs}}$

količnik između ukupne i spoljašnje toplote isparavanja. Uzimajući

u obzir jednačinu stanja vodene pare, dobijamo i sledeći oblik Clausius-Clapeyron-ove jednačine

(6) $$\frac{de_w}{dT} = \frac{1}{\alpha_v - \alpha_a} \frac{L_{av}}{T}$$

Za praktična izračunavanja oblik (5) naročito je podesan. Vrednost A se srazmerno malo menja sa temperaturom, od koje jedino zavisi. Ona iznosi oko 20. Neke vrednosti date su u donjoj tablici.

Primena dobivenih jednačina u meteorologiji je svestrana.

Planck-ova jednačina daje nam kako se menja toplota isparavanja sa temperaturom. Clausius-Clapeyron-ova jednačina nam daje kako se menja pritisak zasićene vodene pare sa temperaturom.

Specifična toplota vode i leda su

$c = 1,00$ kcal kg^{-1} $grad^{-1}$ za vodu i 0,51 kcal $kg^{-1}grad^{-1}$ za led.

Specifična toplota vodene pare pri konstantnom pritisku je $c_{pv} =$ 0,44 kcal kg^{-1} $grad^{-1}$ (str. 50). Uzimajući ove vrednosti u obzir, dobijamo iz Planck-ove jednačine (2) i potpuno analogne za L_{lv} sledeće vrednosti:

(7) $$\frac{dL_{av}}{dT}, \frac{dL_{lv}}{dT} = \begin{matrix} -\ 0,56 \text{ kcal } kg^{-1}grad^{-1} & \text{za vodu} \\ -\ 0,07 \text{ kcal } kg^{-1}grad^{-1} & \text{za led.} \end{matrix}$$

Dobiveni rezultat se sa izmerenim vrednostima odlično slaže. Za vodu je napr. stvarna vrednost

(8) $$\frac{dL_{av}}{dT} = -\ 0,57 \text{ kcal } kg^{-1} \text{ } grad^{-1}$$

Ako uzmemo dalje u obzir vrednosti za L_{av} i L_{lv} pri temperaturi 0^oC (str. 52), onda nam vrednosti (8) odn. (7) daju

(9) $$\boxed{L_{av} = 597 - 0,57\, t \text{ kcal } kg^{-1}} \quad \text{i} \quad L_{lv} = 677 \text{ kcal } kg^{-1}$$

Vidimo da toplota isparavanja zavisi samo od temperature i da se sa temperaturom linearno smanjuje. Toplota sublimacije sa temperaturom se praktično ne menja.

Integralenjem jednačine (4), kad drugi član u zagradi zanemarimo, dobijamo jednačinu

(10) $$\ln \frac{e_w}{e_{wo}} = -\frac{L_{av}}{R_v} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_o}\right)$$

u kojoj treba pod L_{av} da podrazumevamo neku srednju vrednost toplote isparavanja vode na putu integralenja između temperatura T_o i T.

U saglasnosti sa merenjima pri temperaturi $T_o = 273^oK$ je pritisak zasićene vodene pare $e_{wo} = 6,1$ mb. Uzimajući ovo u obzir, možemo za temperature oko 0^oC mesto jedn. (10) pisati

(11) $$e_w = 6,1 \cdot 10^{\frac{ML}{273R_v}\frac{t}{(273+t)}} \text{ mb}$$

gde je za zasićenu vodenu paru u odnosu na vodu

(12) $$\frac{ML}{273R_v} = 8,61 \qquad (\text{za } L = L_{av} \text{ je uzeto } 597,4\ m^2sec^{-2})$$

a u odnosu na led

(13) $$\frac{ML}{273R_v} = 9,76 \qquad (L = L_{lv} = 677,4\ m^2sec^{-2})$$

Jednačina (11) sa vrednostima (12) i (13) liči potpuno na razne empiričke formule (Magnus, Tetens, Thiesen). Naročito se podudara sa empiričkom formulom Thiesen-a u kojoj mesto konstanata (12) i (13) stoje konstante 8,628 i 9,78. Izložitelj jednačine za zasićenu vodenu paru u odnosu na vodu sadrži još dodatne članove. U našoj približnoj formuli (11) ne pojavljuju se, pošto pri integralenju nismo uzeli u obzir da je L_{av} u saglasnosti sa jedn. (9) funkcija temperature, već smo se zadovoljili srednjom vrednošću.

Sa menjanjem temperature, a time i pritiska zasićene vodene pare, menja se i njena gustina. Ako uzmemo u obzir Clausius-Clapeyron-ovu jednačinu i diferencijalni oblik jednačine stanja vodene pare, vidimo da se prilikom promene temperature zasićene vodene pare za dT njena gustina promeni za

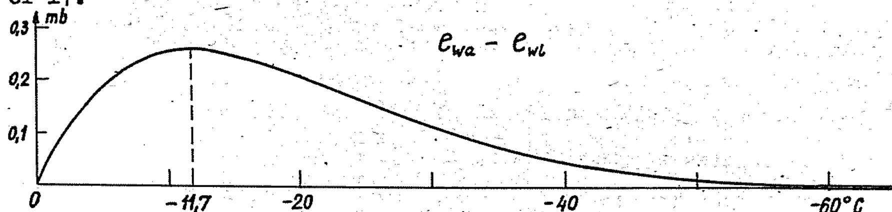
(14) $$d\rho_{vw} = (A - 1)\rho_{vw}\frac{dT}{T}$$

Prilikom smanjenja temperature gustina se smanjuje, što znači da se prilikom smanjenja temperature za $-dT$ u svakoj jedinici zapremine kondenzuje $-d\rho_{vw}$ vode.

Toplota isparavanja u odnosu na led uvek je veća nego u odnosu na vodu. Zbog toga je prema jedn. (11)

(15) $$\text{za } t \leqq 0 \qquad e_{wl} \leqq e_{wa}$$

Najveća je razlika između pritiska zasićene vodene pare u odnosu na vodu i u odnosu na led pri temperaturi $t = -11,7^oC$ i iznosi 0,27 mb. Kako se ta razlika menja sa temperaturom vidi se na slici 17.

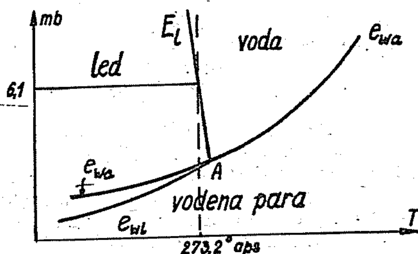


Sl. 17
Razlika između zasićene vodene pare u odnosu na prehlađenu vodu i u odnosu na led

Pritisak zasićene vodene pare samo je funkcija temperature. Ova funkcija prikazana je na sl. 18 u ortogonalnom koordinatnom sistemu, gde abscisna osa pretstavlja temperaturu T a ordinatna osa pritisak.

Pritisak zasićene vodene pare u odnosu na vodu, e_{wa}, sa tem-

peraturom se eksponencijalno povećava. Slično važi i za pritisak ledene pare, e_{wl}. Kriva zasićene ledene pare završava se u jednoj tački, koja leži na krivoj za e_{wa} i ima koordinate $t_A = 0^oC$ i $e_{wl} = 6,1$ mb. U ovoj, tzv. trojnoj tački završava se i kriva koja daje pritisak E_l pod kojim je voda u ravnoteži sa ledom, pod kojim može dakle voda neposredno da se graniči sa ledom, a da se ništa ne menja masa vode na račun leda i obratno. U trojnoj tački A i samo u ovoj tački su led, voda i vodena para u međusobnom ravnotežnom stanju.



Sl. 18
Dijagram faza vode - šematski prikaz

Analognim izvođenjem kao gore dobili bismo Clausius-Clapeyronovu jednačinu za pritisak E_l. Ona glasi

(16) $$\frac{dE_l}{dT} = \frac{1}{\alpha_a - \alpha_l}\frac{L_{la}}{T}$$

(α_l = specifična zapremina leda). Pošto je pri temperaturi $t = 0^oC$ i normalnom pritisku $\alpha_a = 1,00013 \cdot 10^{-3} m^3kg^{-1}$ i $\alpha_l = 1,090 \cdot 10^{-3}$ m^3kg^{-1} ($\alpha_l > \alpha_a$, led pliva na vodi), to je za $t = 0^oC$

(17) $$\frac{dE_l}{dT} = \frac{10^3}{1,00013 - 1,090} \cdot \frac{80 \cdot 4187}{273} \text{ kg m}^{-1} \text{ sec}^{-2} \text{ grad}^{-1} =$$
$$= - 1,37 \cdot 10^5 \text{ mb grad}^{-1} = - 140 \text{ kp cm}^{-2} \text{ grad}^{-1}$$

Vidimo da se sa povećavanjem pritiska tačka mržnjenja vode smanjuje. To je jedna od anomalija vode i posledica je činjenice da je specifična zapremina leda veća od vode. Sa povećavanjem pritiska tačka mržnenja vode polako se smanjuje i kada se pritisak poveća za 140 atm. smanji se tek za 1°.

Pri pritisku p = 760 mm Hg = 1013 mb voda se smrzava pri temperaturi 0,0000 °C . Prema dobivenoj vrednosti je zbog toga u saglasnosti sa vrednošću (17) kod pritiska e = 6,1 mb tačka mržnjenja

(18) $$t_A = (1013 - 6,1) : (1,37 \cdot 10^5) = + 0,007^oC$$

tako da abscisa t_A trojne tačke A nije tačno 0°C.

Voda isparava kada je $e < e_{wa}$. Slično se i led koji ima sa vodom jednaku temperaturu topi kada je $e > E_l$. Ako je suprotno $e < E_l$, voda se smrzava.

Na kraju dajemo neke vrednosti koje možemo na osnovu gornjih jednačina izračunati.

t =	-40,0	-20,0	0,0	+20,0 °C	
L_{av} =	2591,6	2546,1	2500,6	2455,1·10^3	joula kg^{-1}
L_{lv} =	2836,2	2833,2	2830,2	- ·10^3	joula kg^{-1}
L_s =	107,6	116,8	126,1	135,3·10^3	joula kg^{-1}

t =	-40,0	-20,0	0,0	+20,0°C	+40,0°C
A_a =	24,09	21,79	19,84	18,15	16,67
A_l =	26,36	24,25	22,45	-	
e_{wa} =	0,1891	1,2540	6,1078	23,373	73,777 mb
e_{wl} =	0,1283	1,032	6,107	-	- mb

(indeksom a i l označene veličine odnose se na čistu vodu odn. čisti led).

10. Neke veličine stanja vlažnog vazduha

Stanje vlažnog vazduha možemo u termodinamičkom pogledu tačno odrediti sledećim veličinama stanja: temperaturom, pritiskom, gustinom ili specifičnom zapreminom i specifičnom vlažnošću. Prisustvo vodene pare u vazduhu često se prikazuje i sledećim veličinama:

1. Odnos smese r i specifična vlažnost q. Prema definiciji je

(1) $$r = \frac{m_v}{m_s}$$

odnos smese vlažnog vazduha mase $m = m_s + m_v$ koji sadrži masu m_v vodene pare (= masa vodene pare na jedinicu mase suvog vazduha). Odnos smese r je sa specifičnom vlažnošću q u sledećoj vezi

(2) $$r = \frac{q}{1 - q} \quad \text{ili} \quad q = \frac{r}{1 + r}$$

Sem za $r = q = 0$ (suvi vazduh) je $r > q$.

Uzimajući u obzir jednačinu stanja za suvi vazduh i za vodenu paru dobijamo iz jedn. (1)

(3) $$r = \frac{R_s e}{R_v p_s} = 0,622 \frac{e}{p_s}$$

Slično dobijamo za specifičnu vlažnost (str. 48)

(4) $$q = \frac{Re}{R_v p} = 0,622 \frac{e}{p - 0,378e}$$

Kad uzmemo u obzir vrednosti za pritisak zasićene vodene pare (gornja tablica) i uporedimo ih sa stvarnim atmosferskim pritiskom, onda vidimo da možemo često sa dovoljnom tačnošću da pišemo

(5) $$q \doteq r \doteq 0,622 \frac{e}{p}$$

2. Apsolutna vlažnost je masa vodene pare izražena u gramovima koja se nalazi u kubnom metru vazduha. Ako izražavamo gustinu vazduha u kg m^{-3}, onda je

(6) $$a = 1000\rho_v = 1000\rho q$$

Ako uzmemo u obzir jednačinu stanja vodene pare, onda vidimo da mesto jedn. (6) možemo da pišemo

(7) $$a = \frac{288,9}{T} e \quad (e \text{ u mm Hg})$$

Za temperaturu T = 288,9° aps. = 15,7°C je

(8) $$a = e \qquad (e \text{ u mm Hg})$$

Inače ova jednačina važi samo približno, ali ipak sa tačnošću koja je u praksi obično dovoljna.

3. Relativna vlažnost vazduha U definisana je jednačinom

(9) $$U = \frac{e}{e_w} = 100\,\frac{e}{e_w}\ \%$$

(e = stvarni pritisak vodene pare, e_w = pritisak zasićene vodene pare pri temperaturi vazduha). Ako uzmemo u obzir jednačinu stanja vodene pare kao i jedn. (6) i (5) dobijamo

(10) $$U = \frac{\varrho_v}{\varrho_{vw}} = \frac{a}{a_w} \doteq \frac{q}{q_w} \doteq \frac{r}{r_w}$$

gde se veličine označene indeksom w odnose na zasićenu vodenu paru pri temperaturi vazduha.

Diferenciranjem jedn. (9) dobijamo promenu dU relativne vlažnosti U koja je u vezi sa promenom de stvarnog pritiska vodene pare e i sa promenom de_w pritiska zasićene vodene pare koja se prilikom promene temperature T za dT pojavi. Tako je

(11) $$dU = \left(\frac{de}{e} - \frac{de_w}{e_w}\right)U = \left(\frac{de}{e} - A\frac{dT}{T}\right)U$$

gde smo odmah primenili i Clausius-Clapeyron-ovu jednačinu (9 (5)). Na drugoj strani zbog jedn. (4) važi

(12) $$\frac{de}{e} = \frac{dq}{q} + \frac{dp}{p} - \frac{dR}{R}$$

Pošto je prema definiciji gasne konstante vlažnog vazduha (4 (7))

$$\frac{dq}{q} - \frac{dR}{R} = \frac{R_s}{R}\,\frac{dq}{q}$$

to mesto jedn. (12) možemo pisati

(13) $$\frac{de}{e} = \frac{R_s}{R}\,\frac{dq}{q} + \frac{dp}{p}$$

Slično zbog jedn. (3) važi

(14) $$\frac{de}{e} = \frac{dr}{r} + \frac{dp_s}{p_s}$$

Uzimajući sada dobivene vrednosti (13) i (14) u jedn. (11) u obzir, dobijamo konačno za promenu relativne vlažnosti (Čadež, 1957)

(15) $$dU = \left(\frac{R_s}{R}\,\frac{dq}{q} - A\frac{dT}{T} + \frac{dp}{p}\right)U \text{ ili } dU = \left(\frac{dr}{r} - A\frac{dT}{T} + \frac{dp_s}{p_s}\right)U$$

Kolike su pojedine parcijalne promene vidimo iz sledećeg primera: Pri q ili r = 10 g kg^{-1}, T = 293° aps., p ili p_s = 1000 mb, dq ili dr = 0,1 g kg^{-1}, dT = 1° i dp = 1 mb je npr.

$$dU = (0{,}01 - 0{,}06 + 0{,}001)U$$

Sve promene napisane su istim redom kao u jednačinama (15).

4. Gasna konstanta i virtuelna temperatura vlažnog vazduha. U saglasnosti sa jedn. (5) i definicijom gasne konstante 4 (7) i virtuelne temperature 4 (9) približno važi

(16) $$R = R_s(1 + 0{,}378\,\frac{e}{p}) \quad i \quad T_v = T(1 + 0{,}378\,\frac{e}{p})$$

Jedna i druga vrednost zavisi od pritiska vodene pare i pritiska vazduha, a virtuelna temperatura i od temperature. Neke vrednosti koje se odnose na zasićeni vazduh daje nam tablica

t =	-20,0	0,0	20,0	40,0°C	p = 1000 mb
$T_v - T$ =	0,12	0,6	2,6	8,9°	
$R_v - R_s$ =	0,14	0,66	2,54	8,01	/kgmsec/

5. Tačka rose vazduha t_d je temperatura pri kojoj bi se pri nepromenjenom pritisku vodene pare pojavila kondenzacija. Očigledno za tačku rose, za koju je stvarni pritisak vodene pare maksimalni, važi jednačina (9: (11) i (12))

(17) $$e = 6{,}1\cdot 10^{8{,}61\,\frac{t_d}{273 + t_d}}$$

Logaritmovanjem dobijamo odavde tačku rose

(18) $$t_d = \frac{31{,}6(\log e - \log 6{,}1)}{1 - 0{,}116(\log e - \log 6{,}1)}$$

Tačka rose je funkcija samo pritiska vodene pare.

Za tačku rose je stvarni pritisak vodene pare maksimalni. Zbog toga se prilikom povećanja pritiska vodene pare e za de u saglasnosti sa Clausius-Clapeyron-ovom jednačinom tačka rose promeni za

(19) $$dT_d = \frac{T_d}{A_d}\,\frac{de}{e}$$

(A_d = A pri temperaturi T_d). Ako se za vreme menjanja pritiska vodene pare temperatura vazduha ne menja, onda se u saglasnosti sa jedn. (9) pri tome relativna vlažnost vazduha promeni za

$$dU = \frac{de}{e}\,U$$

tako da je

(20) $$A_d\,\frac{dT_d}{T_d} = \frac{dU}{U} \qquad (dT = 0)$$

Ako se pod ovim uslovom (dT = 0) pritisak vodene pare poveća na e_w, tj. toliko da dođe do zasićenja vodene pare i da se relativna vlažnost U poveća na 100%, onda nam jedn. (20) posle integralenja daje

(21) $$\ln\frac{U}{100} = \bar{A}\,\ln\frac{T_d}{T}$$

gde je $\bar{A}$ neka srednja vrednost na putu od T_d do T. Razvijanjem u red dobijamo odavde sa dosta velikom tačnošću

(22) $$T - T_d = \frac{1}{A}\,\frac{100 - U}{(100+U):2}\,T$$

(A se odnosi na temperaturu vazduha T). Time smo našli vezu između tačke rose i relativne vlažnosti.

Sa kolikom tačnošću važi ova jednačina vidimo iz ovog primera: Za U = 50% i t = 20°C dobijamo iz jedn. (22) $T - T_d = 10{,}8^\circ$ a iz jedn. (21) tačnu vrednost 10,5°C.

6. Temperatura mokrog termometra. Vlažnost vazduha se na meteorološkim stanicama obično određuje pomoću podataka koji se dobiju psihrometrom. Taj instrument sastoji se iz dva termometra, iz mokrog i suvog. Suvi termometar pokazuje temperaturu vazduha t, a mokri temperaturu t' mokrog rezervoara. Temperatura mokrog termometra t' je u nezasićenom vazduhu manja od temperature t vazduha, i to zbog toga što sa mokre krpice, koja obavija rezervoar mokrog termometra, voda isparava i time hladi vazduh i termometar.

Posmatrajmo šta se dešava sa delićem vazduha početne mase

$$m = m_s + m_v$$

temperature t koji struji prema mokrom rezervoaru. U dodiru sa rezervoarom poveća se zbog isparavanja masa m_v vodene pare posmatranog delića na m_v'. Za ovo isparavanje potrebno je $L_{av}'(m_v'-m_v)$ toplote (L_{av}' = toplota isparavanja pri temperaturi t') i pod pretpostavkom da se ukupna toplota oduzme posmatranom deliću mase $m = m_s + m_v$ pri konstantnom pritisku p (dovođenje toplote u rezervoar po toplotnoj provodljivosti i zračenju zanemareno) se prema prvom principu termodinamike taj delić ohladi za

$$(23) \qquad t - t' = \frac{L_{av}'}{m_s c_{ps} + m_v c_{pv}} (m_v' - m_v)$$

U saglasnosti sa definicijom odnosa smese dobijamo dalje

$$(24) \qquad t - t' = \frac{L_{av}'}{c_{ps} + r\, c_{pv}} (r' - r)$$

Od toga koliko vode ispari sa krpice zavisi vrednost r'. Ona je najveća tada kada prilikom dodira vazduha sa krpicom dođe do zasićenja. Tada je $r' = r_w'$. Zasićenje vazduha koji prelazi preko krpice postizava se dobrom ventilacijom psihrometra. Takav psihrometar pokazuje najveću moguću razliku t - t' koja se zove psihrometarska diferencija. Za temperature oko 0°C dobijamo iz jedn. (24) kad uzmemo u obzir jedn. (5)

$$(25) \qquad t - t' = 1545 \frac{e_w' - e}{p} .$$

(e = pritisak vodene pare vazduha, e_w' = pritisak zasićene vodene pare pri temperaturi t', p = atmosferski pritisak) i odavde za pritisak vodene pare

$$(26) \qquad e = e_w' - \frac{1}{2}(t - t') \frac{p}{772}$$

Pomoću dobivene ili slične psihrometarske formule izrađene su razne psihrometarske tablice (i za $r' < r_w'$) i grafikoni pomoću kojih se na meteorološkim stanicama određuje pritisak vodene pare i uopšte vlažnost vazduha u atmosferi. Kada je na krpici rezervoara mokrog termometra led, konstante u jedn. (25) i (26) treba zameniti drugim koje proizilaze iz L_{lv} a ne iz L_{av}.

7. Za analizu vazdušnih masa u sinoptičkoj meteorologiji i za

fizioklimatska istraživanja od značaja je pojam ekvivalentne temperature vazduha. To je ona temperatura t_e koju bi imao suvi deo vazduha kada bi pri konstantnom pritisku primio ukupnu toplotu isparavanja koju taj vazduh sadrži. Očigledno je

(27) $$t_e = t + \frac{L_{av} r}{c_{ps}}$$

ili približno

(28) $$t_e = t + 2,5\,r \qquad (r \text{ u } g/kg)$$

Kad uzmemo u obzir jedn. (3) možemo pisati i

(29) $$t_e = t + \frac{0,622 L_{av} e}{c_{ps}(p - e)} \doteq t + 1545 \frac{e}{p - e}$$

Za $L = L_{lv}$ mesto 1545 treba da stoji 1751, tj. za 13% veći broj.

11. Toplotna provodljivost vazduha

Kao svako telo tako i vazduh provodi toplotu sa toplijeg na hladnije mesto. Ako pretpostavimo da vazduh u svim pravcima jednako provodi toplotu, onda toplota struji u pravcu temperaturnog gradijenta $-\nabla T$. Ovu struju toplote pretstavljamo vektorom fluksa $\vec{\phi}_Q$ koji je usmeren u pravcu temperaturnog gradijenta a po intenzitetu je jednak toploti koja u jedinici vremena prolazi kroz jedinicu izotermske površine:

(1) $$\vec{\phi}_Q = -\lambda \nabla T \qquad [\lambda] = [\text{kcal m}^{-1}\text{sec}^{-1}\text{grad}^{-1}] = [\text{kg m sec}^{-3}\text{grad}^{-1}]$$

Srazmernosni faktor λ zove se koeficijenat toplotne provodljivosti ili kratko toplotna provodljivost vazduha. λ zavisi od prirode tela, najveće je za metale a najmanje za gasove. Koliko je za neka tela pokazuje nam tablica na kraju ovog odeljka.

Iz jedn. (1) proizlazi da zbog toplotne provodljivosti kroz makoju elementarnu površinu $d\sigma$ u jedinici vremena prolazi sa toplije na hladniju stranu

(2) $$\phi_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\, d\sigma$$

toplote ($-\frac{\partial T}{\partial n}$ = komponenta temperaturnog gradijenta na mestu gde se nalazi element površine $d\sigma$ u pravcu koji leži normalno na ovu površinu).

Provođenje toplote utiče u većoj ili manjoj meri na temperaturu vazduha u atmosferi.

Zamislimo u vazduhu (ili u makom drugom telu) gde je λ = konst. zatvorenu površinu σ. Preko ovakve površine ulazi zbog toplotne provodljivosti u zatvoreni vazduh u jedinici vremena očigledno

(3) $$-\int_{\sigma} (-\lambda \nabla T) \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_{V} \lambda \nabla \cdot (\nabla T)\, dV$$

toplote ($\vec{n}$ je vektor spoljašnje normale na površinu $d\sigma$). Ovde, gde je

(4) $$\nabla\cdot(\nabla T) = \nabla^2 T = \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

smo očigledno odmah primenili Gaussov stav. Ako ovde dovođenje toplote u vidu zračenja ne uzmemo u obzir i smatramo da se pritisak vazduha u toku vremena ne menja, onda je dovedena toplota (3) jednaka promeni enthalpije zatvorenog vazduha (1 (12)). Kad uzmemo ovo, kao i jedn. 1 (13) i 7 (11) u obzir dobijamo

$$\int_V \lambda\nabla\cdot(\nabla T)\, dV = \int_V c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t}\, dV$$

a odavde

(5) $$\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T$$

gde je

(6) $$k = \frac{\lambda}{\rho c_p} \qquad [k] = [m^2 sec^{-1}]$$

koeficijenat temperaturske provodljivosti ili kratko temperaturska provodljivost. Može se napomenuti da se ovde govori o temperaturskoj provodljivosti, pošto se prema jedn. (5) temperatura to brže menja što veća je ista.

Toplotna provodljivost vazduha vrlo je mala. Suprotno tome njegova temperaturska provodljivost (zbog male gustine) vrlo je velika, kao kod gvožđa!

Kolika je toplotna (λ) i temperaturska (k) provodljivost za neka tela daje nam tablica

	λ	k
vazduh 0^oC, 1,3 kg m^{-3}	0,000053	0,1630
lagan suv sneg	0,00027	0,0027
voda	0,0015	0,0015
močvara	0,0020	0,0022
pesak (Potsdam)	0,0043	0,0112
led	0,0057	0,0134
granit	0,0097	0,0190
gvožđe	0,14-0,17	0,17-0,20
bakar	0,90	1,11

λ izraženo u cal $cm^{-1}sec^{-1}grad^{-1}$ a k u cm^2sec^{-1}. Vrednosti za sneg i led nisu još tačno određene.

IV. STATIKA ATMOSFERE

1. Menjanje temperature i vlažnosti vazduha sa visinom

Temperatura u atmosferi obično sa visinom opada - u donjim slojevima prosečno za 0,6°C na svakih 100 m visinske razlike. Na osnovu svakodnevnih posmatranja je poznato da mogu otstupanja od srednjeg stanja biti vrlo velika, ali da obično, sem u najnižem prizemnom sloju vazduha, temperatura ne opada brže sa visinom nego za 1°C na 100 m. U atmosferi uvek postoje i slojevi vazduha u kojima se temperatura sa visinom povećava (temperaturske inverzije) ili se ne menja (izotermije), kao što je to napr. slučaj u donjem delu atmosfere.

Raspored temperature sa visinom zavisi, kao što ćemo videti kasnije, od raznovrsnih procesa u atmosferi - u prvom redu od zračenja i mešanja vazduha, od isparavanja vode i kondenzacije vodene pare.

Slično kao temperatura i vlažnost vazduha na razne načine se menja sa visinom. U proseku pritisak vodene pare sa visinom opada. Prema empiriskoj Süring-ovoj formuli je u slobodnoj atmosferi na visini z srednja vrednost pritiska vodene pare

(1) $$e = e_o\, 10^{-\frac{z}{60}(1 + \frac{z}{200})}$$

(z = visina u hektometrima, e_o = srednji pritisak vodene pare na visini $z = 0$). U brdima je srednje opadanje pritiska vodene pare sa visinom manje.

U saglasnosti sa jedn. (1) u slobodnoj atmosferi pritisak e sa visinom se na svakih 100 m smanji za

(2) $$-\frac{\partial e}{\partial z} = (1 + \frac{z}{100})\frac{e}{60M}$$

(M = 0,43429... = modul Briggsovih logaritama). Ako uzmemo za srednju vrednost vertikalnog temperaturnog gradijenta 0,6°C/100m, onda dobijamo odavde za srednju promenu relativne vlažnosti sa visinom na 100m visinske razlike

(3) $$\frac{\partial U}{\partial z} = -(1 + \frac{z}{100})\frac{U}{60M} + \frac{0{,}6A}{T}U$$

Ako je napr. e = 5 mb, z = 1 hm, T = 290° aps. (A = 18), onda je $-\frac{\partial e}{\partial z} = 1{,}01\,\frac{5}{26} = 0{,}19$ mb/100 m i $\frac{\partial U}{\partial z} = -0{,}001\,U$ na 100 m. Kad bi pod inače jednakim uslovima bilo T = 270°aps. (A = 20), onda bi bilo $\frac{\partial U}{\partial z} = +0{,}006\,U$. Vidimo da se prosečno relativna vlažnost srazmerno malo menja sa visinom, ali od slučaja do slučaja, naročito u oblasti inverzija, sa visinom se vrlo brzo menja.

U saglasnosti sa jedn. (1) pritisak vodene pare se na visini 1700 m smanji na polovinu.

Naš zadatak je sada da proučimo kako se menjaju pritisak i gustina vazduha sa visinom (u mirnoj atmosferi) ako su nam poznate temperatura i vlažnost vazduha kao funkcije visine.

2. Opadanje pritiska i gustine vazduha sa visinom u mirnoj atmosferi

U mirnoj atmosferi se atmosferski pritisak u horizontalnom pravcu ne menja. Ovo vidimo iz opšte jednačine kretanja za turbulentan vazduh II 9 (12) prema kojoj je, kad uzmemo u obzir da je u mirnoj atmosferi vektor brzine svuda i uvek jednak nuli,

(1) $$\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\varrho \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

U koordinatnom sistemu sa z-osom prema zenitu ova jednačina sadrži sledeće tri skalarne jednačine:

(2) $$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -g\varrho$$

Odavde vidimo da se pritisak u horizontalnom pravcu stvarno ne menja, a da sa visinom opada.

Jednačina (2^3) je osnovna jednačina statike koja u diferencijalnom obliku napisana glasi

(3) $$dp = -g\varrho dz \qquad \text{ili} \qquad dp = -\varrho d\phi$$

Opadanje pritiska sa visinom je u mirnoj atmosferi srazmerno ubrzanju teže i gustini vazduha.

Često je važno da znamo za koliko treba da se popnemo pa da se atmosferski pritisak smanji za jedinicu. Ova vrednost

(4) $$-\frac{\partial z}{\partial p} = \frac{1}{g\varrho} \qquad \text{ili} \qquad -\frac{\partial \phi}{\partial p} = \frac{1}{\varrho}$$

zove se barometarski visinski stupanj. Primenom jednačine stanja vazduha dobijamo mesto jedn. (3)

(5) $$dp = -\frac{gp}{R_s T_v} dz \qquad \text{ili} \qquad dp = -\frac{p}{R_s T_v} d\phi$$

Integralenjem prve jednačine (3) od z pa do vrha atmosfere (do visine z_v) gde je p = 0, dobijamo

(6) $$p = \int_z^{z_v} g\varrho dz$$

U mirnoj atmosferi je prema tome pritisak na visini z brojno jednak težini vazduha koji se nalazi iznad visine z u vertikalnom stubu vazduha preseka 1. Vidimo da se u mirnoj atmosferi sa visinom atmosferski pritisak za toliko smanji za koliko se pri tome u spomenutom stubu smanji težina vazduha.

U vezi sa menjanjem pritiska, temperature i vlažnosti vazduha

menja se i gustina vazduha sa visinom. U saglasnosti sa jednačinom stanja vazduha prilikom promene visine za dz gustina vazduha se promeni za

$$d\varrho = \varrho\left(\frac{dp}{p} - \frac{dT_v}{T_v}\right) \tag{7}$$

ili prilikom promene visine za jedinicu, kad uzmemo u obzir jedn. (5), za

$$\frac{\partial\varrho}{\partial z} = -\frac{\varrho}{T_v}\left(\frac{g}{R_s} + \frac{\partial T_v}{\partial z}\right) \tag{8}$$

Na mestu u atmosferi gde je opadanje virtuelne temperature sa visinom

$$-\frac{\partial T_v}{\partial z} \lesseqgtr \frac{g}{R_s} = 0,034 \text{ grad m}^{-1}$$

gustina vazduha sa visinom se smanjuje, ne menja odn. se povećava. Atmosfera u kojoj se gustina vazduha sa visinom ne menja zove se homogena atmosfera. U suvoj homogenoj atmosferi je vertikalni temperaturni gradijent

$$-\frac{\partial T}{\partial z} = \gamma_h = \frac{g}{R_s} \tag{9}$$

3. Barometarska visinska formula

Osnovna jednačina statike daje nam mogućnost da izračunamo pritisak p u mirnoj atmosferi na visini z gde je geopotencijal $\emptyset$ iz poznatog pritiska p_o na nekoj drugoj visini z = 0 gde je geopotencijal $\emptyset_o$ kada nam je poznat raspored temperature T i specifične vlažnosti q međusloja sa visinom.

A. Suva atmosfera

Iz jedn. 2 (5), kad uzmeo u obzir da je u suvoj atmosferi $T_v = T$, dobijamo odmah

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\,dz}{R_s T} \quad \text{ili} \quad \frac{dp}{p} = -\frac{d\emptyset}{R_s T} \tag{1}$$

a odavde integralenjem

$$p = p_o e^{-\frac{gz}{R_s T_s}} \quad \text{i} \quad p = p_o e^{-\frac{\emptyset - \emptyset_o}{R_s T_s'}} \tag{2}$$

gde su T_s i T_s' barometarske srednje temperature međusloja definisane na sledeći način:

$$\int_0^z \frac{dz}{T} = \frac{z}{T_s} \quad \text{i} \quad \int_{\emptyset_o}^{\emptyset} \frac{d\emptyset}{T} = \frac{\emptyset - \emptyset_o}{T_s'} \tag{3}$$

U slučaju da se temperatura T linearno menja sa visinom, što je u pojedinim slojevima u atmosferi bar aproksimativno uvek slučaj, možemo pisati

$$T = T_o - \gamma z \qquad (\gamma = \text{const.}) \tag{4}$$

($\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}$ = vertikalni temperaturni gradijent). U saglasnosti sa

$R_s = 287,04 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ grad}^{-1}$

$R_v = 461,50 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ grad}^{-1} = 1,608\, R_s$

jedn. (3) dobijamo u ovakvoj politropnoj atmosferi (za $\gamma \neq 0$)

(5) $$\frac{z}{T_s} = \int_0^z \frac{dz}{T} = \int_0^z \frac{dz}{T_o - \gamma z} = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{T_o}{T}$$

Uzimajući ovo u obzir u jedn. (2) dobijamo barometarsku visinsku formulu za suvu politropnu atmosferu

(6) $$\frac{p}{p_o} = \left(\frac{T}{T_o}\right)^{\frac{g}{R_s \gamma}}$$

U atmosferi gde je $\gamma = g:R_s$ a to je, kao što smo videli, homogena atmosfera (2 (9)), pritisak u saglasnosti sa jedn. (6) i (4) linearno opada sa visinom i na visini z je

(7) $$p = p_o - g\rho z$$

($\rho = \frac{p_o}{R_s T_o}$ = gustina homogene atmosfere).

U izotermnoj atmosferi ($\gamma = 0$) je u saglasnosti sa jedn.(3) barometarska srednja temperatura jednaka stvarnoj temperaturi ($T_s = T$) i barometarska visinska formula za izotermnu atmosferu jednaka je opštoj (2), samo mesto T_s odn. T_s' treba da stoji T.

U prirodi se atmosfera u pojedinim slojevima ponaša kao politropna sa konstantnim temperaturnim gradijentom. Ako znamo kako se u atmosferi temperatura menja sa visinom i koliki je pritisak na nekom mestu, napr. pri tlu, onda lako možemo izračunati pritisak p na makojoj visini z. Atmosferu samo podelimo na slojeve u kojima možemo smatrati γ konstantnim i postepeno izračunamo prema gornjim jednačinama pritisak na svakoj granici ovakvih slojeva. Kada se zadovoljavamo sa manjom tačnošću, prilikom izračunavanja uzimamo manje međuslojeva i srednju temperaturu tih slojeva određujemo približno, obično grafički. Za takve i slične potrebe postoje razne tablice i grafikoni.

Od interesa je visina h na kojoj je u suvoj atmosferi pritisak dva puta manji nego pri tlu.

Ako u barometarskoj visinskoj formuli (2) ili (6) mesto p pišemo $p_o:2$ dobijamo da je pritisak dva puta manji nego pri tlu na visini

(8) $$h = (R_s T_s \ln 2):g \quad \text{odn.} \quad h = \frac{T_o}{\gamma}(1 - 0{,}5^{R_s\gamma:g})$$

Kolike su te visine za razne γ daje nam tablica (prema H. Koschmieder-u)

$t_o = 0^oC$	$\gamma =$	0,0	0,487	0,974	3,42	$^oC/100m$
$p = p_o:2$	$h =$	5539	5273	5027	3995	m

Visina h ništa ne zavisi od donjeg pritiska i samo je funkcija srednje temperature sloja i ubrzanja sile zemljine teže.

Ako pišemo

$$T_s = 273{,}2(1 + \alpha t_s) \quad \text{i} \quad T_s' = 273{,}2(1 + \alpha t_s')$$

gde je

(9) $$\alpha = \frac{1}{273,2} = 0,00366$$

onda barometarsku visinsku formulu možemo pisati i u obliku

(10) $$p = p_o 10^{-\frac{z}{B(1+\alpha t_s)}\frac{g}{g_{45,0}}} \quad \text{ili} \quad p = p_o 10^{-\frac{\emptyset-\emptyset_o}{B'(1+\alpha t_s')}}$$

gde su

(11) $$B = \frac{273,2R_s}{Mg_{45,0}} \quad \text{i} \quad B' = \frac{273,2R_s}{M}$$

Ako geopotencijal želimo izraziti u geopotencijalnim metrima treba u imenitelju konstante B' da stoji još faktor 9,8. U tom slučaju i ako visine merimo u metrima je

(12) $$B = 18411 \text{ m} \quad \text{i} \quad B' = 18423 \text{ gpm}$$

B. Vlažna atmosfera

Osnovna jednačina statike za vlažnu atmosferu se od one za suvu atmosferu, (1), razlikuje samo po tome da mesto temperature T stoji virtuelna temperatura T_v. Sve jednačine koje smo izveli za suvu atmosferu važe prema tome i za vlažnu samo mesto obične temperature treba svuda da stoji virtuelna a mesto srednje barometarske temperature T_s treba da stoji srednja barometarska virtuelna temperatura T_{vs}.

Vrednosti veličina koje se javljaju u barometarskoj visinskoj formuli ne možemo nikada tačno odrediti. Koliko utiču pogrešni podaci na rezultat vidimo odmah kada variramo sve promenljive veličine u jedn. (2). Na taj način dobijamo

(13) $$\frac{dp}{p} = \frac{dp_o}{p_o} - \frac{zdg}{R_sT_s} - \frac{gdz}{R_sT_s} + \frac{gzdT_s}{R_sT_s^2}$$

(u vlažnoj atmosferi mesto T_s treba da stoji T_{vs}). Pogrešna vrednost pritiska pri tlu i srednje temperature sloja utiču u istom smislu, dok pogrešne vrednosti u ubrzanju teže i visini utiču u suprotnom smislu na izračunatu vrednost pritiska p na visini z.

Pri pritisku pri tlu p_o = 1000 mb, visini z = 3000 m, srednjoj temperaturi međusloja $T_s = 250^o$, ubrzanju teže g = 9,8062 m sec^{-2} i pogreškama dp_o = 1 mb, dz = 1 m, $dT_s = 1^o$ i dg = + 0,3086·10^{-6}·1500 m sec^{-2} (umesto srednjeg g za sloj debljine 3000 m uzeto je g na moru) bilo bi

(14) $$dp = (0,700 + 0,013546 - 0,09566 + 1,126)\frac{p}{700} \text{ mb}.$$

Pritisak p na visini 3000 m je oko 700 mb (tablica na str. 73) i treba ga izračunati pomoću jedn. (2). Greške su napisane istim redom kao u jedn. (13). Koliko utiču pojedine veličine i kod drugih vrednosti na tačnost rezultata se iz jedn. (13) i (14) može dobro proceniti. Ovde želimo skrenuti pažnju da računanje sa $g_{\varphi,o}$ mesto sa srednjim g sloja pri manjim visinama ne utiče mnogo na rezultat, ali da pri izračunavanju pritiska na većim visinama ova greška može da bude prilična.

Mesto barometarske srednje (virtuelne) temperature u praksi se obično računa sa aritmetičkom sredinom:

$$(15) \qquad T_m = \frac{T_o + T}{2}$$

(T_o, T = temperatura na visini gde je pritisak p_o odn. p). Ako temperatura linearno opada sa visinom (γ = const.), onda možemo lako utvrditi grešku koja se pri tome pojavi.

Razvijanjem jedn. (5) u red dobijamo

$$\frac{z}{T_s} = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{T_o}{T} = \frac{2}{\gamma}\left[\frac{T_o - T}{T_o + T} + \frac{1}{3}\left(\frac{T_o - T}{T_o + T}\right)^3 + \dots\right]$$

i odavde kad uzmemo u obzir jedn. (4)

$$\frac{1}{T_s} = \frac{1}{T_m}\left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{\gamma z}{T_m}\right)^2 + \dots\right]$$

ili

$$T_m - T_s = \frac{T_s}{12}\left(\frac{\gamma z}{T_m}\right)^2 + \dots$$

što nam za manje debljine sloja sa dovoljnom tačnošću daje

$$(16) \qquad T_s = T_m - \frac{\gamma^2 z^2}{12 T_m}$$

Pri γ = 0,01 grad m^{-1}, z = 3000 m i $T_m = 300^o$ je $T_s - T_m = -0{,}25^o$. Vidimo da su razlike male i da je srednja barometarska temperatura manja ili (pri izotermnoj atmosferi) jednaka aritmetičkoj srednjoj temperaturi.

4. Izračunavanje pritiska, temperature i visine pomoću barometarske visinske formule

U barometarskoj visinskoj formuli pojavljuju se četiri promenljive veličine: p, p_o, z i T_s. Pored pritiska p možemo ovom formulom izračunati, kada poznajemo ostale tri vrednosti, ili pritisak na nižem nivou p_o (napr. redukcija atmosferskog pritiska na srednji nivo mora) ili visinu z na kojoj je pritisak p (u aerologiji gde je poznata temperatura i vlažnost u funkciji pritiska viših slojeva atmosfere, u avijaciji za određivanje visine aviona, u planinarstvu itd) ili pak srednju temperaturu T_s (u svrhu određivanja srednje temperature međusloja).

Iz jedn. 3 (10) i 3 (2) dobijamo odmah

$$(1) \qquad p_o = p\, 10^{\frac{z}{B(1+\alpha t_{vs})}\frac{g}{g_{45,0}}} \qquad \text{odn.} \qquad p_o = p\, 10^{\frac{\phi - \phi_o}{B'(1+\alpha t_{vs}')}}$$

dalje

$$(2) \qquad z = \frac{R_s T_{vs}}{g}(\ln p_o - \ln p) \qquad \text{odn.} \qquad \phi - \phi_o = R_s T_{vs}'(\ln p_o - \ln p)$$

i još

$$T_{vs} = \frac{gz}{R_s(\ln p_o - \ln p)} \qquad \text{odn.} \qquad T_{vs}' = \frac{\phi - \phi_o}{R_s(\ln p_o - \ln p)}$$

Pri redukciji atmosferskog pritiska na srednji nivo mora uzima se u prognostičko-sinoptičkoj službi za vertikalni gradijent temperature uvek γ = 0,5°C / 100 m. Mesto temperature na stanici treba uzeti virtuelnu temperatru na stanici.

Primena barometarske visinske formule u meteorološkoj službi je svestrana.

U svrhu raznih upoređenja, prvenstveno u avijaciji, vrlo je važno da se tačno zna na osnovu kakvih podataka su određene skale altimetara, instrumenata za određivanje visine pomoću atmosferskog pritiska. Da bi se u tom pogledu postigla jednoobraznost Internacionalna komisija za vazduhoplovnu navigaciju (ICAO) odredila je sledeću internacionalnu standardnu atmosferu:

1. Vazduh je suv i hemiski sastav mu je na svim visinama jednak.
2. Vrednost gravitacije svuda je jednaka i iznosi 9,8062 m sec^{-2}.
3. Temperatura i pritisak na srednjoj visini nivoa mora su 15°C i 1013,2 mb = 760,0 mm Hg.
4. Na makojoj visini z (u metrima) merenoj iznad srednje visine mora i između 0 i 11 000 m temperatura vazduha jednaka je t = 15 - 0,0065 z°C.
5. Za visine iznad 11 000 m temperatura vazduha je konstantna i jednaka je - 56,5°C.

Da bismo imali približnu pretstavu o tome koliki mogu da budu atmosferski pritisak i neke druge veličine na raznim visinama daje se ovde izvod iz tablice za suvu "normalnu atmosferu" na 45° geografske širine iz Koschmieder-ovog udžbenika. Za početni pritisak uzeto je 1000 mb, dakle manje nego kod internacionalne standardne atmosfere, a to je i nešto manje nego što je prosečna vrednost na površini mora, pošto je ona približno 760 mm Hg. Za donji deo atmosfere - troposferu uzeto je i ovde da temperatura linearno opada sa visinom, ali svega za 0,6°C na 100 m, što se manje slaže sa srednjim stanjem atmosfere nego kod internacionalne standardne atmosfere. Za stratosferu koja se dole preko tropopauze graniči sa troposferom uzeto je da se temperatura sa visinom ne menja, što približno odgovara prirodnim uslovima. Za debljinu troposfere koja se u prirodi kreće nekako u granicama 7 (iznad polova) i 17 kilometara (iznad ekvatora) uzeto je 10 km.

z km	T °K	b mm Hg	p mb	ρ kg m^{-3}	α m^{3}kg^{-1}	ϑ °C	barom. vis. st. m/mm Hg	m/mb
20	213,2	37,03	49,37	0,08074	12,385	229,0	168,4	126,3
15	213,2	82,27	109,7	0,1794	5,575	126,9	75,5	56,9
10	213,2	183,0	244,0	0,3990	2,506	45,4	34,1	25,6
7	231,2	290,1	386,7	0,5832	1,715	29,9	23,3	17,5
5	243,2	386,8	515,7	0,7394	1,353	20,5	18,4	13,8
4	249,2	444,4	592,4	0,8288	1,207	16,1	16,4	12,3
3	255,2	508,7	678,3	0,9269	1,079	11,8	14,7	12,3
2	261,2	580,7	774,2	1,0334	0,968	7,7	13,2	11,0
1	267,2	661,0	881,2	1,1500	0,870	3,8	11,8	8,9
0	273,2	750,1	1000,0	1,2762	0,784	0,0	10,7	8,0

ϑ = potencijalna temperatura vazduha o kojoj biće reč kasnije.

Za približno procenjivanje pritiska na većim visinama možemo se koristiti jednostavnim obrascem:

Ako je u izotermnoj atmosferi pritisak dva puta manji nego pri tlu na visini h, onda je u saglasnosti sa jedn. 3 (8) četiri (2^2) puta manji na visini 2h. Osam (2^3) je puta manji na visini 3h a 2^n puta je manji na visini nh. Na visini z = nh je prema tome

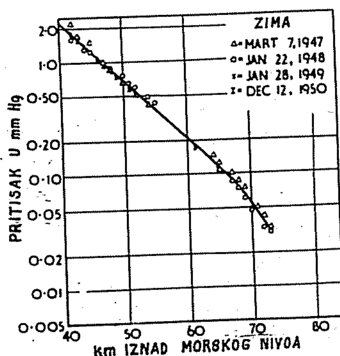
(3) $$p = p_o : 2^n \qquad \text{ili} \qquad p = p_o : 2^{\frac{z}{h}}$$

Ovaj obrazac važi samo za izotermnu atmosferu, pošto se u njoj temperatura, od koje jedino zavisi vrednost h, sa visinom ne menja. Inače važi samo približno.

U izotermnoj atmosferi t = 0,0°C sa pritiskom pri tlu p_o = 1000 mb je napr. na visini z = 10 h, tj. na visini 55390 m (tablica na str. 70) atmosferski pritisak

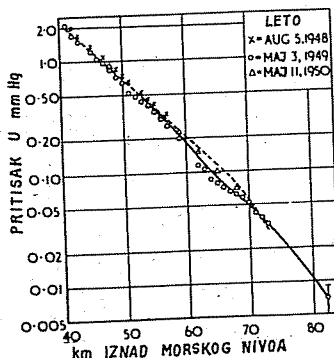
$$p = p_o : 1024 \text{ mb} \doteq 1 \text{ mb}$$

Koliki može da bude stvarni pritisak na tim visinama i još na većim vidimo iz slika 19 i 20 koje su uzete iz rada H. E. LaGow, Physical Properties of the Atmosphere up into the F_1-Layer (objavljenog u knjizi Rocket Exploration of the Upper Atmosphere, London, 1954 u redakciji R.L.F. Boyd-a i M.J. Seaton-a - University College, London). Podaci su dobiveni raketnim merenjima pomoću raketa V-2. To su prva direktna merenja pritiska na tim velikim visinama, pošto su do tada merenja bila vršena samo pomoću balona koji nisu mogli da pređu visinu 30 km. Iznad visine 75 km greške verovatno nisu veće od 10%.



Sl. 19

Zimski pritisci iznad White Sands, New Mexico. (12.dec. pritisak je bio meren u ponoć; ostali pritisci bili su mereni u toku dana.



Sl. 20

Letni pritisci iznad White Sands, New Mexico i iznad ekvatora u blizini Božićnih ostrva u Tihom Okeanu (podaci o pritisku 11 maja su ekvatorske vrednosti). Isprekidana linija prikazuje u svrhu upoređenja srednje zimske pritiske.

5. Visina i masa atmosfere

Prema barometarskoj visinskoj formuli atmosferski pritisak sa visinom opada, i pred nama stoji pitanje da li postoji granica atmosfere, tj. visina na kojoj se pritisak smanji na nulu, a da iznad te visine nema više vazduha.

Atmosferski pritisak definisan je silom pritiska kojom atmosfera deluje na jedinicu površine. Kada se popnemo dosta visoko, u saglasnosti sa jednačinom stanja vazduha gustina vazduha vrlo je mala i sa visinom postaje sve manja. U svakom kubnom metru ima sve manje molekula i na kraju možemo zamisliti da dođemo do visine gde ih ima već tako malo da definicija pritiska gubi svoj smisao, pošto se dejstvo molekula na zamišljenu graničnu površinu oseća samo još kao pojedini udari. Iako se dakle pritisak na nekoj visini praktično smanji na nulu, tamo ne može još da bude granica atmosfere.

Kao radioaktivni proizvod raspadanja zemljine kore, iz zemlje izlazi na pojedinim mestima helijum. U Severnoj Americi izlazi iz zemlje do $2\cdot10^7$ m^3 ovog plemenitog gasa godišnje, a sa čitave površine Zemlje verovatno oko 20 puta više. Pošto se helium u zemljinoj atmosferi ne nagomilava, to vidimo da taj gas stalno i izlazi iz atmosfere, da prema tome atmosfera na vrhu nije ograničena, već da polako prelazi u "atmosferu" međuzvezdanog prostora koji nije nigde potpuno prazan.

Merenjima visine pojavljivanja polarne svetlosti utvrđeno je prisustvo vazduha, prvenstveno azota i aktivnog kiseonika (ozona) još na visinama 1000 km i većim. Polarna svetlost koja je elektromagnetne prirode i posledica jako pojačanog korpuskularnog zračenja Sunca obično se zapaža u polarnim oblastima na visinama između 100 i 300 km. Na većim visinama, do 1000 km i više, zapaža se u polarnim oblastima na noćnoj strani Zemlje polarna svetlost plavkasto ljubičaste boje koja je druge prirode od ove. Ona je posledica obasjavanja vazduha Suncem na tim velikim visinama. Donji delovi te svetlosti slede senki koja se sa Suncem premešta. To su do skora bili jedini neposredni dokazi o postojanju atmosfere na tim velikim visinama. U otkrivanju osobina atmosfere na tim visinama veštački sateliti, od kojih prvi su sovjetski naučnici 4. oktobra 1957 pustili u vasionu, doneće neslućene rezultate.

Ukupna masa atmosfere, od zemljine podloge do visine z_v na kojoj se pritisak praktično smanji na nulu, je u saglasnosti sa osnovnom jednačinom statike

$$M = \sigma\int_0^{z_v}\rho\, dz = \frac{p_0\sigma}{g}$$

gde je $\sigma = 5{,}10\cdot10^{14}$ m^2 površina Zemlje, g srednje ubrzanje teže na putu od 0 do z_v i p_0 pritisak pri tlu. Za p_0 = 740 mm Hg (srednja vrednost po J. Hann-u gde su uzeta u obzir uzvišenja na kontinentima) i g = 9,8 m sec^{-2} dobija J. Hann

$$M = 5{,}13\cdot10^{18}\ kg$$

Pošto je masa Zemlje $M_Z = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg, to vidimo da je masa atmosfere prema ovom proračunu oko milion puta manja od mase Zemlje.

Pošto se sila teže (g) sa visinom smanjuje, to je masa atmosfere nešto veća od ovde izračunate.

Može se napomenuti da je na ekvatoru na otstojanju 6,6 r gde je r poluprečnik Zemlje, sila teže već jednaka nuli i da je sila gravitacije Zemlje jednaka sili gravitacije Sunca na otstojanju 41 r od Zemlje.

V. TERMODINAMIKA ATMOSFERE

1. Jednačina za dovedenu toplotu

Vazduh u atmosferi pod najraznovrsnijim uslovima prima i daje toplotu. Na mestu dovođenja i odvođenja toplote mogu se menjati sve veličine stanja vazduha i to delom zbog samog dovođenja i odvođenja toplote a delom zbog opštih procesa u atmosferi.

Posmatrajmo delić vazduha u kome mogu da se nalaze kapljice ili kristalići, kao sastavni delovi oblaka ili magle. Konstantna masa M tog delića zajedno sa vodom u tečnom ili čvrstom stanju sastoji se iz mase m_s suvog vazduha, mase m_v vodene pare i mase m_a vode u tečnom ili čvrstom stanju. Prema tome je

(1) $$M = m + m_a \quad \text{gde je} \quad m = m_s + m_v$$

U ovom sistemu, pošto se ukupna masa M u toku vremena ne menja, može se menjati samo masa vode u tečnom ili čvrstom stanju i to na račun vodene pare i obratno:

(2) $$d(m_s + m_v + m_a) = 0 \quad \text{i} \quad dm = dm_v = - dm_a$$

U saglasnosti sa prvim principom termodinamike je

(3) $$dQ_M = dU_M + p\, dV_M$$

gde je dQ_M toplota dovedena u intervalu vremena dt tom sistemu (vazduhu sa vodom) a dU_M promena unutrašnje energije tog sistema koja se zajedno sa promenom dV_M njegove zapremine jednovremeno pojavi.

Razni su uzroci zbog kojih se u atmosferi vazduhu menja zapremina. Obično se ona menja prilikom uzlaznog i nizlaznog kretanja vazduha, tj. prilikom smanjivanja i povećavanja atmosferskog pritiska. Sa menjanjem zapremine u vezi su i odgovarajuće promene temperature. Svakako se temperatura prisutnih kapljica ili kristalića vode ne prilagođava odmah izmenjenoj temperaturi vazduha i promena temperature vazduha dT je obično različita od jednovremene (srednje) promene dT_a temperature vode u tečnom ili čvrstom stanju koja se nalazi u posmatranom sistemu.

Unutrašnja energija našeg sistema jednaka je zbiru unutrašnjih energija masa m_s, m_v i m_a:

(4) $$U_M = m_s U_s + m_v U_v + m_a U_a$$

Kad uzmemo u obzir vrednosti za pojedine specifične unutrašnje energije (III 7: (4), (8), (7)) i jedn. (2) dobijamo odavde

(5) $$dU_M = m_s c_{vs} dT + m_v c dT + m_v dL_u + L_u dm + m_a c\, dT_a$$

($L_u = L_{avu}$ ili L_{lvu}). Ako uzmemo u obzir jedn. III 9 (1) i III 5 (1), to sledi konačno

(6) $$dU_M = mc_v dT + m_a c dT_a + L_u dm$$

Unutrašnja energija posmatranog sistema, tj. vazduha sa vodom u tečnom ili čvrstom stanju može se menjati iz dva različita uzroka: zbog menjanja temperature (menjanja kinetičke energije neuređenog kretanja molekula) i zbog kondenzacije ili isparavanja vode (menjanje unutrašnje potencijalne energije).

Masa vode m_a je u poređenju sa masom vazduha m neznatna. Ako zbog toga taj član u poređenju sa ostalim zanemarimo i onda jedn. (6) uzmemo u jedn. (3) u obzir, dobijamo jednačinu za toplotu dovedenu vazduhu

(7) $$dQ_M = mc_v dT + pdV_M + L_u dm$$

Za razna izračunavanja koristan je još jedan oblik ove jednačine:

Promena dV_M zapremine posmatranog sistema sastoji se iz promene dV zapremine vazduha i promene dV_a zapremine vode koja nije u gasovitom stanju. Pošto se specifična zapremina vode α_a sa temperaturom praktično ne menja, to ovu drugu promenu možemo da pišemo u obliku

(8) $$dV_a = \alpha_a dm_a = -\alpha_a dm$$

Uzimajući ovo u obzir kao i diferencijalni oblik jednačine stanja vlažnog vazduha dobijamo za drugi član na desnoj strani jednačine (7)

(9) $$pdV_M = mRdT + R_v Tdm - Vdp - p\alpha_a dm$$

ili, kad uzmemo u obzir još definiciju za spoljašnju toplotu isparavanja (III 6 (7)),

(10) $$pdV_M = mRdT - Vdp + L_s dm$$

(L_s= spoljašnja toplota isparavanja vode ili leda). Unošenjem dobivene vrednosti u jedn. (7) i uzimanjem u obzir poznatu jednačinu $R = c_p - c_v$ dobijamo drugi oblik gornje jednačine (7)

(11) $$dQ_M = m\, c_p\, dT - V\, dp + L\, dm$$

($L = L_u + L_s$ = toplota isparavanja vode ili leda).

Dobiveni drugi oblik jednačine za dovedenu toplotu (prvi princip termodinamike) naročito je koristan za izračunavanje promena temperature vazduha koji se u atmosferi kreće adijabatski.

Pomoću jedn. (11) i (6) nalazimo dalje korisnu formulu za izračunavanje promene unutrašnje energije posmatranog delića vazduha sa vodom. Eleminacijom promene temperature dT iz ovih dveju jednačina dobijamo za ovu promenu

(12) $$dU_M = \frac{1}{\kappa}(dQ_M + V\, dp) + \frac{\kappa - 1}{\kappa} L\, dm - L_s dm$$

a odavde i iz jedn. (3) za rad koji jednovremeno posmatrani delić

zbog menjanja svoje zapremine pod dejstvom sila atmosferskog pritiska izvrši

(13) $$p\,dV_M = \frac{\kappa-1}{\kappa}(dQ_M - L\,dm) - \frac{1}{\kappa} V\,dp + L_s dm$$

Primena dobivenih jednačina u dinamičkoj meteorologiji je svestrana.

2. Isparavanje vode i kondenzacija vodene pare u atmosferi

Prisustvo vodene pare u atmosferi za termodinamiku i dinamiku atmosfere od naročitog je značaja. Vodena para sadrži naime ogromne količine toplote isparavanja koja se prilikom kondenzacije oslobađa, što uvek u većoj ili manjoj meri utiče na razvoj vremena.

Vodena para ulazi u atmosferu isparavanjem vode sa zemljinog tla. Ona isparava na raznim mestima i u atmosferi samoj, sa kapljica kiše i snežnih pahuljica kada padaju kroz više ili manje suve slojeve vazduha. Često se isparavaju i kristalići snega i sitne kapljice - sastavni delovi oblaka.

Na drugoj strani vodena para neprestano i napušta atmosferu i to u vidu najraznovrsnijih padavina. Vodena para se kondenzuje delom na samoj zemlji a prvenstveno u slobodnoj atmosferi iz koje kondenzovana voda u vidu kiše, snega, grada i drugih oblika padavina na raznim mestima ispada i ponovo se vraća na zemljino tle.

Toplota koja je potrebna za isparavanje može se vodi dovoditi toplotnom provodljivošću i zračenjem. Dovedena toplota obično se samo delom upotrebi za isparavanje, pošto delom ulazi dalje u vodu. Slično je kondenzacija vode u vezi sa odvođenjem toplote kondenzacije.

Neka je $\frac{dm_a}{dt}$ promena mase vode koja se u jedinici vremena iza jedinice površine preko koje se voda graniči sa vazduhom, zbog kondenzacije ($\frac{dm_a}{dt} > 0$) odn. isparavanja ($\frac{dm_a}{dt} < 0$) pojavi. Ako su λ i λ_a koeficijenti toplotne provodljivosti vazduha odn. vode i ako su $\frac{dQ}{dt}$ i $\frac{dQ_a}{dt}$ struje energije od kojih prva u vidu zračenja u jedinici vremena kroz jedinicu površine ulazi od spolja u vodu a druga jednovremeno isto u vidu zračenja kroz istu površinu odlazi dalje u vodu, onda je očigledno ispunjena sledeća jednačina

(1) $$\left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{dQ}{dt}\right) - \left(-\lambda_a\frac{\partial T_a}{\partial n} + \frac{dQ_a}{dt}\right) = -L\frac{dm_a}{dt}$$

(n = pravac koji je normalan na površinu vode i usmeren je ka vodi).

Ako je razlika na levoj strani negativna, onda zbog toplotne provodljivosti i zračenja na vodenu površinu dolazi manje toplote nego što je odlazi. U tom slučaju se jedan deo toplote, tj. deo $L\frac{dm_a}{dt}$, zajedno sa vodenom parom u vidu latentne toplote isparavanja dovodi

u vodu, što znači da je na površini vode došlo do kondenzacije vodene pare. U slučaju da je spomenuta razlika jednaka nuli, masa vode se ne menja. Tada nema ni kondenzacije ni isparavanja.

Na drugoj strani zavisi brzina isparavanja i kondenzacije od transporta vodene pare ispred površine vode. Prema Fick-ovom zakonu difuzije ovaj transport je srazmeran gradijentu gustine vodene pare i usmeren je u pravcu i smislu tog gradijenta. Ako ovo uzmemo u obzir, onda vidimo da možemo pisati

$$-\frac{dm_a}{dt} = k_d \frac{\partial \rho_v}{\partial n} \tag{2}$$

gde je k_d = koeficijenat difuzije ili kratko difuzija ($-\frac{\partial \rho_v}{\partial n}$ = komponenta gradijenta gustine vodene pare u pravcu n neposredno ispred površine vode).

Jedna i druga jednačina treba da budu jednovremeno ispunjene.

Uticaj zračenja obično se može zanemariti. Ako zanemarimo ovaj uticaj kao i transport toplote u vodi, onda se jedn. (1) bitno pojednostavi i redukuje se na sledeću:

$$\frac{dm_a}{dt} = \frac{\lambda}{L}\frac{\partial T}{\partial n} \tag{3}$$

Upoređenjem dobivene jednačine sa jedn. (2) dobijamo, kad uzmemo još u obzir jedn. III 11 (6) kojom je definisan koeficijenat temperaturske provodljivosti, da je

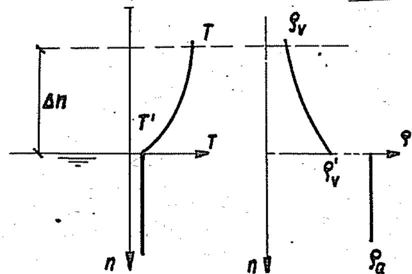
$$-\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{L k_d}{\rho c_p k}\frac{\partial \rho_v}{\partial n} \tag{4}$$

Gradijenti temperature i gustine vodene pare praktično se određuju merenjem temperature i vlažnosti ispred same vodene površine i malo dalje od nje, na nekom otstojanju Δn, gde se poremećenost zbog blizine vode praktično ne oseća više (sl. 21). Ako vrednosti koje se odnose na neporemećeno stanje označimo bez crtice a one ispred vode crticom, onda možemo približno da pišemo mesto jedn. (2), (3) i (4)

$$-\frac{dm_a}{dt} = \frac{\rho c_p k}{L}\frac{T-T'}{\Delta n} = k_d \frac{\rho_v'-\rho_v}{\Delta n} \tag{5}$$

i

$$T - T' = \frac{L k_d}{c_p k}\frac{\rho_v'-\rho_v}{\rho} \tag{6}$$



Sl. 21
Šematski prikaz polja temperature i gustine vodene pare u oblasti površine vode

Iz jedn. (5) vidimo da je isparavanje sa vodene površine srazmerno razlici između temperature okolnog vazduha i temperature na samoj površini vode, kao i razlici između gustine vodene pare neposreno ispred vodene površine i u okolnom neporemećenom vazduhu.

Na osnovu podataka o temperaturi površine vode,koja je praktično jednaka temperaturi vazduha neposredno ispred vodene površine, podataka o temperaturi okolnog vazduha i o debljini poremećenog sloja lako pomoću jedn. (5) izračunamo kolika je brzina isparavanja. Vrednost Δn zavisi u prvom redu od brzine strujanja vazduha ispred površine vode i očigledno je to manja što jači je vetar.

Tablica nam daje neke vrednosti temperaturske provodljivosti vazduha i difuzije pri raznim temperaturama.

t =	-20	-10	0	10	20	30	40°C	
k =	0,165	0,177	0,189	0,202	0,215	0,228	0,242	cm^2sec^{-1}
k_d =	0,197	0,211	0,226	0,241	0,257	0,273	0,289	cm^2sec^{-1}

Ove vrednosti treba množiti još faktorom 1000:p (p = pritisak u mb). Podaci su uzeti iz knjige John C. Johnson, Physical Meteorology, London, 1954.

Za izračunavanje isparavanja vode postoje razne empirijske formule.

3. Voda u atmosferi

U atmosferi se voda nalazi u gasovitom, tečnom i čvrstom stanju. Vodena para je praktično svuda u vazduhu, a vrlo je neravnomerno raspoređena. Hladan vazduh je obično sadrži mnogo manje nego topli, koji može da sadrži relativno vrlo velike količine vodene pare. U oblastima tropskih kiša može biti e = 40 mb i više.

Zbog prisustva jezgara kondenzacije i sublimacije vazduh u atmosferi obično nigde nije prezasićen vodenom parom (u odnosu na vodu). U oblacima i u magli vodena para je praktično zasićena, tj. ima je toliko da bi bila u ravnoteži sa čistom vodom jednake temperature sa kojom bi se graničila preko ravne površine. To je možda na prvi pogled iznenađujuće, kad znamo da je pritisak vodene pare e_r koja je u ravnoteži sa čistom vodom kapljice veći od pritiska zasićene vodene pare e_w. Prema Thomson-ovoj formuli (1870) je naime

$$\varrho_a R_v T \ln \frac{e_r}{e_w} = \frac{2p_n}{r} \qquad (1)$$

(ϱ_a = gustina vode, p_n = površinski napon vode ≐ 73 $ergcm^{-2}$ pri sobnoj temperaturi, r = poluprečnik kapljice).

Posmatranja su pokazala da se poluprečnici kapljica magle uglavnom kreću u granicama između $4 \cdot 10^{-4}$ i $3 \cdot 10^{-3}$ cm. Normalno su kapljice oblaka nešto veće. Kapljice oblaka i magle tako su velike da se povećanje pritiska vodene pare u okolini zbog zakrivljenosti površine skoro ne oseća. Pri $r = 10^{-5}$, 10^{-6}, 10^{-7} cm je naime e_r = 1,012, 1,127 odn. 3,10 puta veće od e_w.

Pored zakrivljenosti površine kapljice utiče na pritisak vodene pare koja je u ravnoteži sa vodom u kapljici i nečistoća vode i naelektrisanost kapljice.

U atmosferi se vrši kondenzacija na raznim mestima na jezgrima

kondenzacije, tj. na sitnim vlažnim česticama higroskopskih substancija, prvenstveno raznih morskih soli dimenzija 10^{-5} do 10^{-6} cm u prečniku. U nižim slojevima atmosfere ima ovakvih jezgara od 2000 do 50 000 i više po kubnom santimetru. Voda kapljice pretstavlja prema tome neku rastopinu, a pritisak vodene pare koja je u ravnoteži sa rastopinom manji je nego iznad čiste vode. Ako se rastopina preko ravne površine graniči sa vodenom parom taj pritisak je

(2) $$e_s = (1 - kC)\, e_w$$

(C = koncentracija rastopine, k = konstanta, specifična za svaku so). Da li važi slična jednačina i za male kapljice nije još dovoljno ispitano.

Na sitnim jezgrima kondenzacije može zbog higroskopnosti već pri srazmerno malom pritisku vodene pare da se pojavi kondenzacija. U početku je koncentracija rastopine vrlo velika, ali sa porastom kapljice ona se vrlo brzo smanjuje, tako da se veće kapljice mogu održati samo u takvom vazduhu u kome je pritisak vodene pare praktično jednak pritisku zasićene vodene pare e_w.

Pritisak e_r uravnotežene vodene pare oko čiste kapljice sa tovarom elektriciteta ε dobija se prema J. Thomson-u pomoću sledeće jednačine:

(3) $$\varrho_a R_v T \ln \frac{e_r}{e_w} = \frac{2p_n}{r} - \frac{\varepsilon^2}{8r^4}$$

Ako je $r = 10^{-4}$ cm i kapljica sadrži 130 elementarnih naboja, desna strana jednaka je nuli i $e_r = e_w$.

Za razliku od jezgara kondenzacije na kojima se pojavljuju kapljice vode, jezgra sublimacije mogu biti i od čvrste materije, razni delići prašine. Ivice tih delića pogodne su za stvaranje kristalića snega najrazličitijih vrsta i oblika. Voda kristališe u heksagonalnom sistemu.

Oblici kristala zavise od prirode jezgara kondenzacije, od temperature i vlažnosti vazduha i od drugih činioca, tako da postoji mnogo vrsta i podvrsta kristala od kojih dva nisu međusobno jednaka. Na osnovu 2200 fotografija U. Nakaya došao je do klasifikacije koja je slična onoj od Nordenskjölda i Hellmann-a. On razlikuje sledeće vrste kristala:

1. Iglice,
2. stubići,
3. površinski kristali,
4. kombinacije stubića i površinskih kristala,
5. stubići sa produženim stranskim površinama,
6. kristali inja (kristali sa dodatim delićima oblaka),
7. nepravilni delići snega.

Skoro svi snežni kristali nastaju u vazduhu gde je vodena para prezasićena u odnosu na led, a vrlo često i u odnosu na vodu. Od vrste zavisi pri kojim se temperaturama stvaraju. Tako napr. razgranatane zvezdice (dendriti) nastaju pri temperaturama između - 14 i - 17° C i pri relativnoj vlažnosti (u odnosu na led) oko 110% i većoj. Iglice nastaju pri srazmerno visokim temperaturama

oko - 5°C i pri relativnoj vlažnosti u odnosu na led većoj od 105%. Površinski kritali-pločice mogu da se pojave samo pri temperaturama između - 10 i - 20°C i iznimno već pri niskoj relatvnoj vlažnosti 100% u odnosu na led, itd.

U dalja opisivanja i tumačenja ovih pojava ovde ne možemo da ulazimo. U tom pogledu čitaoca upućujemo na specijalnu literaturu, napr. na odličan rad: Ukichiro Nakaya, Snow Crystals Natural and Artifical, Havard University, Cambridge, 1954.

Pri temperaturama manjim od 0°C postoje u atmosferi oblaci koje sačinjavaju kapljice prehlađene vode ili kristalići leda. Tu postoje dalke dve mogućnosti, a to je od naročitog značaja kod obrazovanja raznih padavina i uopšte kod razvoja vremena koje je s tim u vezi. Nova istraživanja pokazala su da pri temperaturama manjim od - 40°C prehlađena voda ne može više da postoji.

4. Adijabatska kretanja vazduha u atmosferi

Vazduh je providno telo. Zbog toga zračenje direktno skoro ne utiče na temperaturu vazduha (VI). Videli smo da i uticaj toplotne provodljivosti na temperaturu vazduha nije veliki. Ali, uticaj zračenja na temperaturu vazduha u kome se nalaze vodene kapljice i kristalići snega mnogo je veći. Oblačni slojevi zrače naime skoro kao potpuno crna tela. Unutrašnji delovi oblaka u velikoj meri su zaštićeni od ove pojave i tamo se vazduh često kreće skoro potpuno adijabatski.

Ovde ćemo se ograničiti na posmatranje vazduha koji se u mirnoj atmosferi kreće tako sporo da je pritisak stalno jednak pritisku u okolnoj atmosferi na jednakoj visini, gde sa visinom pritisak opada u saglasnosti sa osnovnom jednačinom statike.

Ako veličine koje se odnose na okolni vazduh (u stanju mirovanja) označimo, sada i kasnije, crticom, onda u našem slučaju važi

$$(1) \qquad p = p' \quad i \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p'}{\partial z} = -g\varrho'$$

Ovakvo kretanje vazduha zove se <u>kvazistatičko</u>.

Prema prvom principu termodinamike za adijabatska kretanja (dQ = 0) nezasićenog vazduha važi jednačina (1 (11))

$$(2) \qquad c_p\, dT - \alpha dp = 0 \qquad (dQ = 0)$$

u kojoj u našem slučaju dT i dp pretstavljaju promene temperature i pritiska prilikom promene visine za dz. Ako uzmemo u obzir jedn. (1), dobijamo odavde

$$(3) \qquad \frac{dT}{dz} = -\frac{\alpha}{\alpha'}\,\frac{g}{c_p}$$

Pošto je u saglasnosti sa jedn. (1) pritisak p u deliću jednak pritisku p' u njegovoj neposrednoj okolini, to je, prema jednačini stanja vazduha

$$(4) \qquad \alpha : \alpha' = T_v : T_v' = \varrho' : \varrho$$

Kad ovo uzmemo u obzir u jedn. (3) dobijamo odmah za individualnu promenu temperature delića vazduha kome se visina adijabatski poveća za jedinicu

(5) $$\frac{dT}{dz} = - \frac{T_v}{T_v'} \gamma_a$$

gde je

(6) $$\gamma_a = \frac{g}{c_p} = 0{,}01°C/m$$

tzv. suvoadijabatski temperaturni gradijent.

Prilikom kretanja vazduha u atmosferi virtuelna temperatura T_v delića obično je približno jednaka virtuelnoj temperaturi okružujuće atmosfere. Obično se zbog toga vazduh koji se u atmosferi suvoadijabatski diže na svakih 100m visinske razlike ohladi za 1°C. Ovo svakako nije slučaj pri penjanju jako zagrejanog vazduha. Možemo očekivati da ima npr. pri eksploziji atomske bombe užareni vazduh posle izjednačenja unutrašnjeg pritiska sa početnim temperaturu do 100 000°C i više. U tom slučaju je T_v tristo i više puta veće od T_v'. Kad bi se takav vazduh penjao adijabatski, hladio bi se vrlo brzo, za više stotina °C na svakih 100 m. Svakako je hlađenje mnogo veće, pošto užareni vazduh i emituje u vidu toplotnog zračenja velike količine svoje energije.

Prilikom penjanja vazduh se hladi, pošto se, dolazeći pod sve manji pritisak, njegova zapremina pod dejstvom sila pritiska povećava. Time vazduh, iako se penje adijabatski, gubi na unutrašnjoj energiji, a svako smanjenje unutrašnje energije nezasićenog vazduha u vezi je prema jedn. III 7 (9) sa smanjivanjem temperature. Suprotno tome se prilikom adijabatskog spuštanja vazduha u atmosferi njegova unutrašnja energija povećava a s njom i temperatura. Očigledno je povećavanje temperature jednako smanjenju koje se pojavi prilikom suvoadijabatskog penjanja vazduha na jednakom otstojanju. Pod suvoadijabatskim kretanjem podrazumevamo adijabatsko kretanje nezasićenog vazduha.

Kada se vazduh kreće vlažnoadijabatski, kada se drugim rečima adijabatski kreće vazduh koji je vodenom parom zasićen, tada mesto jedn. (2) važi analogna jednačina (1 (11))

(7) $$c_p dT - \alpha dp + L \frac{dm}{m} = 0$$

Iz diferencijalnog oblika jednačine III 4 (8), tj. jedn. kojom je definisana specifična vlažnost, dobijamo

(8) $$\frac{dm}{m} = \frac{dq_w}{1 - q_w}$$

(q_w = specifična vlažnost zasićenog vazduha koji posmatramo). Ako uzmemo u obzir drugi diferencijalni oblik jednačine za specifičnu vlažnost (III 10 (13)) i vezu između specifične vlažnosti i odnosa smese III 10 (2), vidimo da možemo i pisati

(9) $$\frac{dm}{m} = \frac{R}{R_s} \left(\frac{de_w}{e_w} - \frac{dp}{p}\right) r_w$$

a odavde zbog Clausius-Clapeyron-ove jednačine (III 9 (5)) i definicije odnosa smese (III 10 (3))

(10) $$\frac{dm}{m} = \frac{Re_w}{R_v p_s}\left(A\frac{dT}{T} - \frac{dp}{p}\right)$$

Ako masu m_a vode, koja se u čvrstom ili tečnom stanju nalazi u vazduhu mase m, u poređenju sa masom m zanemarimo, dobijamo deljenjem jednačine za dovedenu toplotu 1 (11) sa m, kad uzmemo u obzir dobivenu vrednost (10) i jednačinu stanja vazduha,

(11) $$dQ = c_{pw}dT - K\alpha dp$$

Ovde je dQ toplota dovedena jedinici mase vazduha u intervalu vremena dt a

(12) $$c_{pw} = c_p + \frac{RLAe_w}{R_v T p_s} \quad \text{i} \quad K = 1 + \frac{Le_w}{R_v T p_s}$$

Vrednost c_{pw} možemo očigledno tumačiti kao specifičnu toplotu zasićenog vazduha pri konstantnom pritisku (Čadež, 1950). Specifična toplota c_{pw} zavisi od temperature i pritiska. Sa temperaturom se smanjuje i približava vrednosti c_{ps}. Neke vrednosti c_{pw} i K za p_s= 1000 mb daje nam tablica. Vrednosti su izračunate pomoću tablica na str. 60, 61 i 63.

t	= - 40	- 20	0	20	40°	°C
e_w	= 0,189	1,254	6,108	23,373	73,777	mb
$c_{pw} - c_p$	= 0,008	0,041	0,165	0,532	1,445	kcal/kg grad
K	= 1,005	1,027	1,121	1,424	2,323	

Iz jedn. (11) dobijamo za individualnu promenu temperature vazduha koji se u atmosferi kvazistatički ((1) i (4)) i vlažnoadijabatski (dQ = 0) popne za jedinicu

(13) $$\frac{dT}{dz} = -\frac{T_v}{T_v'}\gamma_w \quad \text{gde je} \quad \gamma_w = K\frac{g}{c_{pw}}$$

vlažnoadijabatski temperaturni gradijent.

Kao što vidimo iz jedn. (12), veličine c_{pw} i K zavise samo od temperature i pritiska. Zbog toga je vlažnoadijabatski temperaturni gradijent funkcija ovih veličina. Pri niskim temperaturama je e_w malo i zbog toga se prilikom uzlaznog kretanja vazduha vlažnoadijabatski temperaturni gradijent γ_w povećava i približava se asimptotski vrednosti suvoadijabatskog temperaturnog gradijenta γ_a. Iz gornje tablice vidimo da je pri većim pritiscima i za e_w = oko 10 mb vlažnoadijabatski temperaturni gradijent oko 0,5°C/100 m. Uglavnom se u atmosferi vlažnoadijabatski temperaturni gradijent kreće u granicama između 0,5 i 1,0°C na 100 m.

5. Jednačina suve adijabate i potencijalna temperatura vazduha

Jednačinu 4 (2) koja se odnosi na suvoadijabatska kretanja možemo integraliti. Ako prvo uzmemo u obzir jednačinu stanja vazduha, dobijamo

(1) $$c_p\frac{dT}{T} = R\frac{dp}{p}$$

a odavde, pošto su kod suvoadijabatskog kretanja (dq = 0) c_p i R

konstante, integralenjem

(2)
$$\frac{T}{T_o} = \left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{R}{c_p}}$$

(T_o = temperatura delića vazduha kada se nalazi pod pritiskom p_o). Zbog jednačine stanja vazduha možemo mesto jedn. (2) da pišemo i

(3)
$$\rho = \rho_o\left(\frac{T}{T_o}\right)^{\frac{c_v}{R}} \quad \text{ili} \quad p\alpha^{\kappa} = p_o\alpha_o^{\kappa}$$
(Poisson-ova jednačina)

(ρ_o, α_o = gustina i specifična zapremina pri pritisku p_o).

Jednačine (2) i (3) su jednačine stanja vazduha koji se kreće suvoadijabatski. Za razliku od opšte jednačine stanja vazduha u ovim nastupaju samo po dve promenljive veličine. Jednom veličinom stanja je dakle jednoznačno određena i druga, a prema tome i treća.

Jednačina stanja vazduha koji se kreće adijabatski zavisi od početnog stanja (p_o,T_o ili T_o, ρ_o ili α_o,p_o) i za razna početna stanja imamo razne jednačine. Makoja od jednačina (2) i (3) zove se i jednačina suve adijabate, tj. linije koja nam u p, T (ρ, T odn. p, α) kordinatnom sistemu daje vezu između pritiska p i temperature T (gustine ρ i temperature T odn. pritiska p i zapremine α) delića vazduha koji se kreće suvoadijabatski (kome se zapremina menja suvoadijabatski). Ona daje suvu adijabatu kroz tačku p_o,T_o (ρ_o, T_o odn. p_o,α_o) i odnosi se na suvoadijabatske promene zapremine delića koji pod pritiskom p_o ima temperaturu T_o i gustinu ρ_o. Iz jednačina (2) i (3) vidimo da svakoj tačci u p, T; ρ, T odn. p, α sistemu pripada jedna i samo jedna suva adijabata.

Temperatura T_o = Θ koju bi vazduh dobio kada bi suvoadijabatski došao pod normalni pritisak p_o = 1000 mb zove se u meteorologiji potencijalna temperatura. Prema jedn. (2) je

(4)
$$\Theta = T\left(\frac{1000}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}$$

Potencijalna temperatura je od praktičnog značaja, pošto se prilikom suvoadijabatskog kretanja vazduha ne menja. Ona je za takve procese konzervativna veličina.

Logaritmovanjem jedn. (4) dobijamo

(5)
$$\ln\Theta = \ln T - \frac{R}{c_p}\ln p + \text{const.}$$

Ova jednačina nas potseća na jednačinu za specifičnu entropiju vlažnog vazduha III 8 (8) koju možemo pisati u obliku

(6)
$$S = c_p\ln T - R\ln p + \text{const.}$$

Upoređenjem dobivene jednačine sa jedn. (5), vidimo da je

(7)
$$S = c_p\ln\Theta + \text{const.}$$

Entropija nezasićenog vazduha je prema tome samo funkcija njegove

potencijalne temperature. Ovo je razumljivo, kad uzmemo u obzir da se entropija kao i potencijalna temperatura kod suvoadijabatskih i reverzibilnih procesa ne menja. Reverzibilni adijabatski procesi su i izentropski.

Od interesa je dalje kako se u atmosferi Θ menja sa visinom. Iz jedn. (4) dobijamo odmah za ovo menjanje

$$(8) \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial z} = \Theta\left(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{R}{c_p p}\frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

Kad uzmemo u obzir osnovnu jednačinu statike i jednačinu stanja vazduha, dobijamo odavde

$$(9) \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial z} = \frac{\Theta}{T}\left(\gamma_a - \gamma\right)$$

(γ_a, γ = suvoadijabatski i stvarni temperaturni gradijent). Pošto je u atmosferi obično $\gamma < \gamma_a$, to se obično potencijalna temperatura sa visinom, a pogotovo u stratosferi, povećava.

Za razna proučavanja je važno znati, kakve su međusobne veze između promena pojedinih veličina stanja koje nastaju prilikom adijabatskih menjanja zapremine nezasićenog vazduha. Tako je u saglasnosti sa jedn. (2) i (3)

$$(10) \qquad \frac{dT}{dp} = \frac{R}{c_p}\frac{T}{p}, \quad \frac{d\varrho}{dT} = \frac{c_v}{R}\frac{\varrho}{T}, \quad \frac{d\alpha}{dT} = -\frac{c_v}{R}\frac{\alpha}{T}, \quad \frac{d\alpha}{dp} = -\frac{c_v}{c_p}\frac{\alpha}{p}, \quad \frac{d\varrho}{dp} = \frac{c_v}{c_p}\frac{\varrho}{p}$$

ili približno (str. 51)

$$(11) \qquad \frac{dT}{dp} = 0{,}3\frac{T}{p}, \quad \frac{d\varrho}{dT} = 2{,}5\frac{\varrho}{T}, \quad \frac{d\alpha}{dT} = -2{,}5\frac{\alpha}{T}, \quad \frac{d\alpha}{dp} = -0{,}7\frac{\alpha}{p}, \quad \frac{d\varrho}{dp} = 0{,}7\frac{\varrho}{p}$$

6. Jednačina vlažne adijabate i pseudopotencijalna temperatura

Za razliku od pre možemo kroz svaku tačku u p, T sistemu povući više vlažnih adijabata, tj. linija koje u tom koordinatnom sistemu pokazuju vezu između pritiska i temperature vazduha kome se zapremina menja vlažnoadijabatski. Nije naime svejedno da li se prilikom menjanja zapremine kondenzovana voda u vazduhu zadržava, u celini ili delimično, ili ne. Posmatraćemo obe krajne mogućnosti: prvo da kondenzovana voda prilikom smanjivanja temperature delić odmah napusti (napr. u vidu padavina) i drugo da ga uopšte ne napušta. Prva vlažna adijabata zove se ireverzibilna ili pseudoadijabata (W. Bezold, 1888) a druga reverzibilna vlažna adijabata.

Prema drugom principu termodinamike prilikom adijabatskog i reverzibilnog menjanja zapremine entropija vazduha se ne menja. Ako se i u jednom i u drugom primeru kretanje (menjanje zapremine) vrši sporo, pod uslovom da je temperatura delića jednaka temperaturi okolne sredine i da u slučaju "ireverzibilne" adijabate kondenzovana voda zadrži temperaturu koju je prilikom kondenzacije imala, onda možemo da kažemo da se i jedno i drugo kretanje vrši u termodinamičkom smislu reverzibilno.

Izraz ireverzibilna adijabata upotrebljava se za prvu spomenutu vlažnu adijabatu zbog toga što se zamišlja da se kondenzovana voda koja je već jednom izlučena iz delića u delić ne vraća više. Prilikom kretanja prema većem pritisku dobija na taj način vazduh

za razliku kao kod **reverzibilne ad.**, veću temperaturu od one koju je imao pre pod jednakim pritiskom. Samo u tome je dakle smisao reči "ireverzibilan" u slučaju prve adijabate.

Delić vazduha mase $m = m_s + m_v$ zajedno sa vodom u tečnom ili čvrstom stanju mase m_a neka sačinjava sistem sa konstantnom masom

(1) $M = m + m_a = m_s + m_v + m_a$ tako da je $dm = dm_v = -dm_a$

Delić zajedno sa vodom u tečnom ili čvrstom stanju neka se pod gornjim uslovima (reverzibilno) kreće vlažnoadijabatski. Pri tome se u saglasnosti sa drugim principom termodinamike entropija tog sistema ne menja. Na svakom koraku je dakle

(2) $$dS_{m + m_a} = 0$$

Prema jedn. III 8: (10) i (6), kad uzmemo u obzir jedn. (2), dobijamo odmah za slučaj reverzibilne adijabate (promena temperature vazduha jednaka je promeni temperature vode)

(3) $$m_s\left(c_{ps}\frac{dT}{T} - R_s\frac{dp_s}{p_s}\right) + m_v\left[c\frac{dT}{T} + d\left(\frac{L}{T}\right)\right] + \left(S_{ao} + c\ln\frac{T}{T_o} + \frac{L}{T}\right)dm_v + m_a c\frac{dT}{T} + \left(S_{ao} + c\ln\frac{T}{T_o}\right)dm_a = 0$$

odn. zbog jedn. (1)

(4) $$\left[m_s c_{ps} + (m_v + m_a)c\right]\frac{dT}{T} - m_s R_s\frac{dp_s}{p_s} + d\left(m_v\frac{L}{T}\right) = 0$$

Koeficijenat pri $\frac{dT}{T}$ je konstantan, (1), tako da možemo ovu jednačinu odmah integraliti. Time dobijamo <u>jednačinu reverzibilne vlažne adijabate</u>

(5) $$\left[c_{ps} + \left(r_w + \frac{m_a}{m_s}\right)c\right]\ln\frac{T}{T_o} - R_s\ln\frac{p_s}{p_{so}} + \frac{Lr_w}{T} - \frac{L_o r_{wo}}{T_o} = 0$$

(r_w, r_{wo} = odnos smese posmatranog vazduha pri temperaturi T odn. T_o).

Potpuno sličan postupak dovodi nas do jednačine ireverzibilne vlažne adijabate. Uzeti moramo samo u obzir da se temperatura kondenzovane vode ne menja, pošto ona odmah posle kondenzovanja ispada iz delića. U jednačinama koje odgovaraju jednačinama (3) i (4) zbog toga ne nastupa član $m_a c\, dT$, tako da jednačina pseudoadijabate u diferencijalnom obliku glasi

(6) $$(m_s c_{ps} + m_v c)\frac{dT}{T} - m_s R_s\frac{dp_s}{p_s} + d\left(m_v\frac{L}{T}\right) = 0$$

Integralenjem ove jednačine, dobijamo <u>jednačinu pseudoadijabate</u>

(7) $$(c_{ps} + \bar{r}_w c)\ln\frac{T}{T_o} - R_s\ln\frac{p_s}{p_{so}} + \frac{Lr_w}{T} - \frac{L_o r_{wo}}{T_o} = 0$$

gde je $\bar{r}_w$ neka srednja vrednost između r_w i r_{wo}.

Ovde nećemo ulaziti u detaljnija prikazivanja razlika između vrednosti koje nam daju adijabate jedne i druge vrste. U svakom slučaju su one, kao što je već pokazao Fjeldstadt (1925), male.

Drugi član u zagradi prvog člana jedn. (7) je u poređenju sa prvim mali, pri $\bar{r}_w = 5$ g/kg iznosi napr. svega 2% od prvog. Zbog toga se on često zanemaruje.

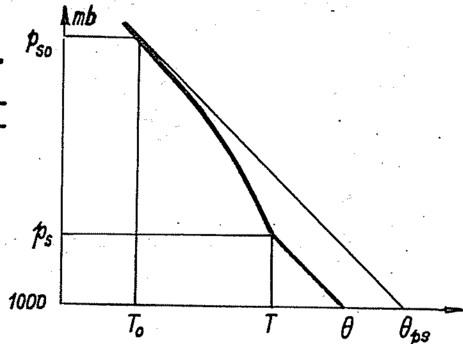
Pomoću dobivene jedn. (7) izračunava se pseudopotencijalna temperatura vazduha koju je G. Stüve (1927) definisao kao temperaturu koju bi dobio vazduh kada bi se prvo adijabatski (prvo suvoadijabatski ako vodenom parom nije zasićen a posle pseudoadijabatski) popeo u atmosferi tako visoko da bi se iz njega izlučila sva vodena para, a posle bi se suvoadijabatski spustio pod normalni pritisak p = 1000 mb. (sl. 22).

Prvo posmatrajmo slučaj da je vazduh vodenom parom zasićen. Početni uslovi neka budu: p_s, T r_w. Kada taj vazduh pseudoadijabatski podignemo dosta visoko biće pri $p_s = p_{so}$ i $T = T_o$:

(8) $$r_w = r_{wo} = 0$$

Sve ove vrednosti međusobno su povezane jednačinom (7).

Ako sada podignuti vazduh adijabatski (suvoadijabatski) ponesemo pod normalni pritisak (p = 1000 mb) dobićemo temperaturu Θ_{ps} za koju prema definiciji potencijalne temperature važi



Sl. 22
Definicija pseudopotencijalne temperature

(9) $$c_{ps} \ln \frac{\Theta_{ps}}{T_o} = R_s \ln \frac{1000}{p_{so}} \quad \text{(p u milibarima)}$$

Očigledno je ova temperatura Θ_{ps} pseudopotencijalna temperatura posmatranog zasićenog vazduha. Eleminacijom vrednosti p_{so}, T_o iz jedn. (9) i (7), kad uzmemo u obzir jedn. (8) i drugi član u zagradi jedn. (7) zanemarimo, dobijamo odmah

(10) $$c_{ps} \ln \frac{\Theta_{ps}}{T} - R_s \ln \frac{1000}{p_s} - \frac{Lr_w}{T} = 0$$

i odavde antilogaritmovanjem (Rosby, 1932)

(11) $$\Theta_{ps} = \Theta_s e^{\frac{Lr_w}{c_{ps}T}}$$

gde je

(12) $$\Theta_s = T \left(\frac{1000}{p_s}\right)^{\frac{R_s}{c_{ps}}} \doteq \Theta \left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{R_s}{c_{ps}}} = \Theta \left(1 + \frac{R_s}{c_{ps}} \frac{e_w}{p_s} + \dots\right)$$

(e_w, Θ = pritisak zasićene vodene pare odn. potencijalna temperatura posmatranog zasićenog vazduha). Vrednost Θ_s Rossby je nazvao

parcijalnom potencijalnom temperaturom (1932). Vidimo da je $\Theta < \Theta_s$.

Pseudopotencijalna temperatura približno je jednaka ekvivalentno potencijalnoj temperaturi (Normand, 1921)

$$\Theta_e = \Theta\, e^{\frac{Lr_w}{c_{ps}T}} \tag{13}$$

Slabija aproksimacija pseudopotencijalne temperature je potencijalna temperatura sa ekvivalentnim dodatkom

$$\Theta_e^* = \Theta + \frac{Lr_w}{c_{ps}} \tag{14}$$

Očigledno je $\Theta_e^* < \Theta_e < \Theta_{ps}$.

Ako vazduh nije vodenom parom zasićen, onda dobijamo pseudopotencijalnu temperaturu isto pomoću obrasca (11), samo mesto r_w treba da stoji stvarni odnos smese r, a mesto temperature temperatura T_k na nivou kondenzacije:

U saglasnosti sa definicijom, pseudopotencijalna temperatura se prilikom suvoadijabatskog i pseudoadijabatskog kretanja ne menja. Kada bismo posmatrani vazduh podigli do nivoa kondenzacije, tamo bi imao, ako bi se pomeranje izvršilo adijabatski, jednaku pseudopotencijalnu temperaturu kao na početku. Na tom putu se ni parcijalna potencijalna temperatura Θ_s ni odnos smese r ne menja. Da se Θ_s ne menja, vidimo iz jedn. (12) i III 8 (9) (str. 57). Menja se samo temperatura i promeni se od T na T_k. Kad uzmemo ovo u obzir, vidimo da je pseudopotencijalna temperatura suvog vazduha stvarno određena na gore navedeni način.

7. Potencijalna temperatura mokrog termometra

Prilikom suvoadijabatskog kretanja vazduha, pored temperature menja se i temperatura mokrog termometra. Ako je vodena para u vazduhu u difuznoj ravnoteži sa vodenom parom okolnog vazduha, $e = e'$, onda se prilikom suvoadijabatske promene visine z za dz, kada se temperatura vazduha promeni za $dT = -(g:c_p)\,dz$, (4 (6)), u saglasnosti sa definicijom III 10 (24) temperatura mokrog termometra promeni za

$$dt' = -\frac{g}{c_p}dz - \frac{L'}{c_{ps} + r\,c_{pv}}dr_w' \tag{1}$$

Ovde promenu specifične toplote isparavanja koja se pri tome pojavi nismo uzeli u obzir. Pošto je prema definiciji odnosa smese

$$dr_w' = r_w'\left(\frac{de_w'}{e_w'} - \frac{dp_s}{p_s}\right)$$

gde je zbog Clausius-Clapeyron-ove jednačine

$$\frac{de_w'}{e_w'} = A'\,\frac{dT'}{T'}$$

($A' = A$ za temperaturu t' mokrog termometra) i, kao što smo videli ranije((III 8 (9)) i IV 2 (3)),

$$\frac{dp_s}{p_s} = - \frac{g\varrho dz}{p}$$

to iz jedn. (1) za smanjenje temperature mokrog termometra prilikom adijabatskog povećanja visine za jedinicu, dobijamo vrednost koja se sa velikom tačnošću podudara sa vlažnoadijabatskim temperaturnim gradijentom za vrednosti p_s, r_w' i T', dakle

(2) $$\frac{dt'}{dz} = - \gamma_w$$

Ovaj obrazac važi uopšte, za suvo- i vlažnoadijabatska kretanja. Pri vlažnoadijabatskom kretanju je naime $t = t'$.

Temperatura koju bi dobio mokri termometar kada bi vazduh došao pod normalni pritisak (1000 mb) zove se potencijalna temperatura mokrog termometra.

8. Uticaj vertikalnih premeštanja vazdušnih slojeva na vertikalni temperaturni gradijent

Zapeženo je već davno da u anticiklonima u donjim slojevima atmosfere temperatura sa visinom srazmerno sporo opada. Ovde mislimo na slojeve koji se nalaze iznad prizemnog vazduha, čija temperatura je u većoj ili manjoj meri uplivisana dnevnim zagrevanjem i noćnim hlađenjem preko zemljine podloge. M. Margules je prvi pokazao (1906) da je ova karakteristična pojava posledica nizlaznog strujanja vazduha, koje se u donjim delovima anticiklona uvek javlja.

Zamislimo da se horizontalno ležeći sloj vazduha početne debljine dz suvoadijabatski spušta i to na taj način da se međusobni raspored vazdušnih delića u sloju ne menja.

Prilikom adijabatskog spuštanja, potencijalna temperatura Θ makog delića iz posmatranog sloja ništa se ne menja. Zbog toga se i razlika između potencijalnih temperatura na gornjoj i donjoj granici sloja prilikom spuštanja pod navedenim uslovima ne menja. Ako uzmemo u obzir jednačinu za menjanje potencijalne temperature sa visinom (5 (9)), vidimo da zbog toga važi

(1) $$\frac{\Theta}{T}(\gamma_a - \gamma)dz = \frac{\Theta}{T_1}(\gamma_a - \gamma_1)dz_1$$

(T, T_1 = temperatura sloja na početku - na visini z i na kraju - na visini z_1; γ, γ_1 = vertikalni temperaturni gradijent u sloju na početku i na kraju, dz, dz_1 početna odn. konačna debljina sloja). Prilikom spuštanja masa vazduha u sloju se ne menja. Ako se na početku deo sloja nalazio iznad površine σ a na kraju iznad površine σ_1, znači da je

(2) $$\varrho \sigma dz = \varrho_1 \sigma_1 dz_1$$

Deljenjem prve jednačine sa ovom i uzimanjem jednačine stanja vazduha u obzir, dobijamo

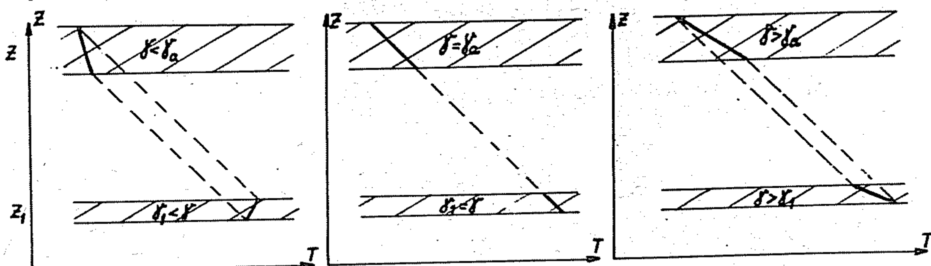
(3) $$\gamma_1 = \gamma_a - \frac{p_1 \sigma_1}{p \sigma}(\gamma_a - \gamma)$$

ili

(4) $$\gamma_1 = \gamma - \frac{p_1\sigma_1 - p\sigma}{p\sigma}(\gamma_a - \gamma)$$

Prilikom spuštanja vazduha povećava se pritisak, a zbog divergencije obično i površina σ. Ako se ta površina povećava ili ne menja, onda se prilikom spuštanja vertikalni temperaturni gradijent smanjuje, ne menja odn. povećava, ako je na početku bio manji, jednak ili veći od suvoadijabatskog. Ako je napr. $\sigma = \sigma_1$, $p_1 = 2p$ i $\gamma = 0,6^oC/100$ m, onda je $\gamma_1 = 0,2^oC/100$ m.

Menjanje vertikalnog temperaturnog gradijenta za vreme suvoadijabatskog spuštanja objašnjava nam slika 23.



Sl. 23

Menjanje vertikalnog temperaturnog gradijenta prilikom spuštanja vazduha

U oblasti anticiklona može da bude spuštanje i razilaženje vazduha toliko jako da se zbog ovih pojava u nižim slojevima pojavi temperaturna inverzija. Takva inverzija zove se inverzija subsidencije. Slično se menja temperaturni gradijent prilikom dizanja vazdušnih slojeva, samo u suprotnom smislu (sl. 23).

9. Slobodna sila potiska i energija nestabilnosti

Na svaki delić vazduha u atmosferi deluje pored sile zemljine teže i gradijentna sila. Tako na delić vazduha mase m i zapremine V deluje u mirnoj atmosferi vertikalno na gore gradijentna sila (II 6 (1), IV 2 (2))

(1) $$-V\frac{\partial p}{\partial z} = Vg\rho = mg$$

Ta sila je po jačini jednaka sili zemljine teže koja deluje na taj isti delić vazduha na dole, tj. u suprotnom pravcu. To su jedine sile koje deluju u mirnoj atmosferi na posmatrani delić i pošto su međusobno po intenzitetu jednake a usmerene u suprotnim pravcima, to je delić u stanju mirovanja.

Zamislimo sada da se u atmosferi sa gustinom ρ' nalazi delić vazduha ili neko drugo telo gustine ρ i zapremine V. U tom slučaju deluje na delić u vertikalnom pravcu nagore gradijentna sila $Vg\rho'$ a nadole sila zemljine teže $Vg\rho$, tako da je rezultanta obadve sile u vertikalnom pravcu naviše

(2) $$S_{\uparrow} = V\varrho' g - V\varrho g = (m' - m)g$$

(m' = masa istisnutog vazduha). Vidimo da u atmosferi ma koje telo onoliko gubi na svojoj težini koliko je težak istisnuti vazduh (Arhimedov zakon). Sila m'g, tj. vertikalna komponenta gradijentne sile koja uvek postoji i uvek deluje naviše zove se sila potiska. Sila $S_{\uparrow}$ zove se slobodna sila potiska.

Kada je masa m' istisnutog vazduha veća od mase m tela, tada je $S_{\uparrow}$ pozitivno i rezultanta iz sile zemljine teže i sile potiska (slobodna sila potiska) usmerena je vertikalno naviše. Zbog ove sile u toku dana se zagrejane vazdušne mase penju, a u toku noći hladan vazduh se spušta.

Ako je posmatrano telo zapremine V vazduh, onda u saglasnosti sa jedn. (2) i 4 (4) možemo mesto jedn. (2) pisati

(3) $$S_{\uparrow} = \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho} mg = \frac{T_v - T_v'}{T_v'} mg$$

Razlike u virtuelnim temperaturama između susednih vazdušnih delića obično nisu velike, najviše nekoliko stepeni. Drukčije je npr. na mestima raznih eksplozija, pogotovo gde dođe do eksplozije atomske bombe. Užareni vazduh na mestu takve eksplozije može da ima posle izjednačenja pritiska sa početnim temperaturu 100000 Celzius-ovih stepeni i višu. U ovom slučaju je $S_{\uparrow}$ više od 300 kp po kilogramu mase vazduha, što znači da na takav vrlo razređeni vazduh deluje naviše gradijentna sila koja je više nego 300 puta veća od sile zemljine teže. Ovo objašnjava činjenicu da se užareni vazduh svega za nekoliko sekundi popne do stratosfere.

Zbog dejstva slobodne sile potiska toplije vazdušne mase teže naviše a hladnije naniže. One dakle poseduju neku potencijalnu energiju.

Neka se na visini z nalazi delić vazduha mase m. Prilikom povećanja visine z za dz slobodna sila potiska izvrši rad

(4) $$dW_m = mg \frac{T_v - T_v'}{T_v'} dz$$

Ako uzmemo u obzir osnovnu jednačinu statike IV 2 (5), dobijamo za taj elementarni rad

(5) $$dW_m = - mR_s(T_v - T_v')\, d\ln p$$

Prilikom prenosa od visine z_1 gde je pritisak p_1 na visinu z_2 gde je pritisak p_2 $(z_2 > z_1)$ sila $S_{\uparrow}$ izvršila bi rad

(6) $$W_m = \int_{z_1}^{z_2} mg \frac{T_v - T_v'}{T_v'} dz = - mR_s \int_{p_1}^{p_2} (T_v - T_v')\, d\ln p$$

Ovim radom, pod pretpostavkom da se prenos izvrši adijabatski, je definisana energija nestabilnosti

(7) $$I_m = W_m$$

vazdušnog delića mase m koji se nalazi na visini z_1 pod pritiskom p_1 u odnosu na visinu z_2 gde je pritisak p_2. U slučaju da je svuda na putu integralenja razlika u virtuelnim temperaturama $T_v - T_v'$ pozitivna, W_m je pozitivno. Tada govorimo o pozitivnoj energiji nestabilnosti, što znači da vazdušni delić, koji je u ovom slučaju na čitavom putu ređi od okolnog vazduha, zbog postojanja sile S, raspolaže nekom potencijalnom energijom u iznosu W_m zbog koje se može podići do visine z_2 i pri tome izvršiti rad W_m. Kada je na svakom otseku puta integralenja $T_v - T_v'$ negativno, govorimo o negativnoj energiji nestabilnosti. U tom slučaju bismo morali sami izvršiti rad $-W_m$ ako bismo hteli adijabatski podići delić mase m sa visine z_1 na visinu z_2. U opštem slučaju može se na putu z_2-z_1 znak razlike $T_v - T_v'$ menjati i energija nestabilnosti sastoji se iz pozitivnih i negativnih delova.

Kad uzmemo u obzir jedn. (4), 4 (5) i 4 (6) vidimo da možemo pisati za slučaj da se na putu $z_2 - z_1$ ne pojavi kondenzacija

(8) $$dW_m = - mc_p dT - mgdz = - md\emptyset$$

gde je

(9) $$\emptyset = c_p T + gz$$

tzv. <u>ukupna potencijalna energija</u> delića jedinice mase (<u>Montgomery-jev potencijal</u>, 1937). Integralenjem jedn. (8) dobijamo

(10) $$L_m = W_m = m(\emptyset_1 - \emptyset_2) = m\left[(c_p T_1 + gz_1) - (c_p T_2 + gz_2)\right]$$

10. Statička stabilnost atmosfere

Spomenuli smo da u atmosferi, sem u prizemnom sloju vazduha, temperatura obično ne opada brže sa visinom nego za 1^o na 100 m visinske razlike. Ovo nije slučajno i u velikoj meri je posledica toga da je u atmosferi gde je $\gamma > \gamma_a$ vazduh u labilnom stanju ravnoteže.

Zamislimo da u mirnoj suvoj atmosferi neki, inače makoji, delić vazduha (koji ima na početku jednaku temperaturu kao okolni vazduh) podignemo adijabatski za dz. Pri tome se njegova temperatura smanji za $- dT = \gamma_a dz$. Pošto je na toj novoj visini temperatura okolnog vazduha za $- \delta T = \gamma dz$ manja nego što je na početnoj visini, to se temperatura podignutog vazduha na novoj visini razlikuje za

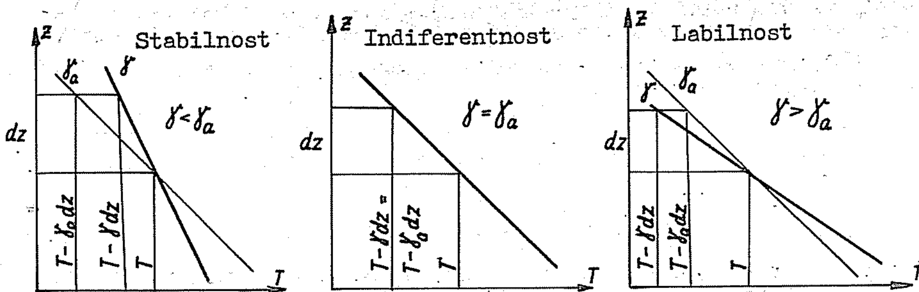
(1) $$dT - \delta T = - (\gamma_a - \gamma) dz$$

od temperature okolnog vazduha. Temperatura podignutog vazduha je prema tome manja, jednaka odn. veća od temperature okolnog vazduha kada je

(2) $$\gamma \lesseqgtr \gamma_a \qquad \text{ili} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial z} \gtreqless 0$$

U prvom slučaju je podignuti vazduh specifično teži, tj. gušći od okolnog i teži da se vrati natrag. U takvoj atmosferi bi i tada vazduh težio da se vrati natrag na početnu visinu kada bismo mu dodelili impuls naniže. Tada bi bio naime topliji, tj. ređi i specifično lakši od okolnog (u jedn. (1) dz < 0). Vidimo da je makoji delić vazduha u podadijabatskoj atmosferi ($\gamma < \gamma_a$) u stabilnom stanju. Zbog toga se takva atmosfera zove stabilna. Slično je u nadadijabatskoj atmosferi ($\gamma > \gamma_a$) svaki delić vazduha u labilnom stanju ravnoteže, podignuti vazduh je naime topliji, a spušteni hladniji od okolne atmosfere. Ovakva atmosfera je labilna (nestabilna). U adijabatskoj atmosferi ($\gamma = \gamma_a$) ima vazduh prenesen adijabatski na makoju visinu svuda jednaku temperaturu kao okolni vazduh, on je zbog toga svuda u indiferentnom stanju ravnoteže. Ovakva atmosfera je indiferentna.

Prema izloženom vidimo da nam uslovi (2) pretstavljaju kriterij za stabilnost suve atmosfere. Prvi znak se odnosi na stabilnu, drugi na indiferentnu a treći na labilnu atmosferu. Na sl. 24 su grafički prikazani kriterijumi za stabilnost atmosfere.



Sl. 24
Prikaz kriterijuma za statičku stabilnost atmosfere

Slično kao za suvu atmosferu važi da je vlažna atmosfera u stabilnom, indiferentnom odn. labilnom stanju kada je

$$(3) \qquad -\frac{\partial T_v}{\partial z} \lesseqgtr -\frac{dT_v}{dz}$$

kada je drugim rečima u atmosferi vertikalni gradijent virtuelne temperature manji, jednak odn. veći od smanjenja virtuelne temperature koje se pojavi za vreme adijabatskog virtuelnog pomaka vazdušnog delića vertikalno naviše za jedinicu rastojanja (9 (3)).

Ako delić vazduha nije vodenom parom zasićen možemo da pretpostavimo da se za vreme virtuelnog pomaka specifična vlažnost ne menja (e = e'). Iz jednačine kojom definišemo virtuelnu temperaturu (III 4 (9)), dobijamo za individualnu promenu virtuelne temperature podignutog vazduha

$$(4) \qquad \frac{dT_v}{dz} = -\frac{T_v}{T}\gamma_a \qquad \left(\frac{dq}{dz} = 0\right)$$

Slično dobijamo za geometrisku promenu virtuelne temperature u vertikalnom pravcu u ukružujućoj atmosferi

(5) $$\frac{\partial T_v}{\partial z} = -\frac{T_v}{T}\gamma + 0{,}608\, T\frac{\partial q}{\partial z}$$

Ako uzmemo u obzir diferencijalnu jednačinu za specifičnu vlažnost III-10 (15) i osnovnu jednačinu statike kao i jednačinu

(6) $$\frac{R}{R_s} = \frac{T_v}{T}$$

koju odmah dobijamo upoređenjem jedn. III-4: (5) i (10), dobijamo

(7) $$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{T_v}{T}\left(\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{A}{T}\gamma + \gamma_h\frac{1}{T_v}\right)q$$

a odavde i iz jedn. (5), (4) i (3) kriterij za stabilnost nezasićene atmosfere

(8) $$(1+0{,}608\,A\,q)\gamma \lesseqqgtr \gamma_a + 0{,}608\left(\frac{T}{U}\frac{\partial U}{\partial z} + \gamma_h\right)q$$ stabilnost / indiferentnost / labilnost

Vidimo da stabilnost vlažne nezasićene atmosfere ne zavisi samo od temperaturnog gradijenta γ već i od vertikalnog gradijenta relativne vlažnosti i od specifične vlažnosti. Opadanje relativne vlažnosti sa visinom utiče uvek u smislu smanjivanja stabilnosti.

Koliko mogu da iznose pojedine vrednosti iz kriterija (8) daje nam sledeći primer:

Pri $T = 270^o$aps., $U = 50\,\%$, $\frac{\partial U}{\partial z} = \pm\, 10\%/100$ m i $q = 5$ g/kg je atmosfera u stabilnom, indiferentnom odn. labilnom stanju kada je

$$(1 + 0{,}06)\gamma \lesseqqgtr 0{,}97 \pm 0{,}16 + 0{,}01$$

Vrednosti su napisane istim redom kao u (8). Iz primera vidimo da jedino član koji potiče od menjanja relativne vlažnosti sa visinom može primetno da utiče na stabilnost vlažne nezasićene atmosfere.

Sada se postavlja pitanje o stabilnosti delića vazduha koji je vodenom parom zasićen i nalazi se kao oblak u nezasićenoj atmosferi. U ovom slučaju važi mesto jedn. (4) jednačina

(9) $$\frac{dT_v}{dz} = -\frac{T_v}{T}\gamma_w + 0{,}608\, T\frac{dq}{dz}$$

Ako uzmemo u obzir diferencijalnu jednačinu za specifičnu vlažnost III-10 (15), osnovnu jednačinu statike i činjenicu da se prilikom adijabatskog podizanja zasićenog vazduha relativna vlažnost ne menja, dobijamo odavde, slično kao pre, i iz jedn. (5), (6), (7) i (3) kriterij za stabilnost zasićenog delića vazduha koji se nalazi u vlažnoj atmosferi sa jednakom virtuelnom temperaturom

(10) $$(1+0{,}608Aq)\gamma \lesseqqgtr \frac{T'}{T}(1+0{,}608\,Aq_w)\gamma_w + 0{,}608\,\frac{T'}{T_v}\left[\frac{T_v}{U}\frac{\partial U}{\partial z}q - \gamma_h(q_w - q)\right]$$ stabilnost / indiferentnost / labilnost

(T' =temperatura okružujućeg vazduha koja je nešto veća, zbog je-

Ovaj kriterij donekle je sličan onome za vlažnu nezasićenu atmosferu, (8). Najveća je razlika u tome da se mesto suvoadijabatskog temperaturnog gradijenta γ_a pojavljuje vlažnoadijabatski γ_w. Ako uzmemo u obzir vrednosti iz gornjeg primera, vidimo, da sem na mestima gde se relativna vlažnost brzo menja sa visinom, za zasićen vazduh u nezasićenoj atmosferi važi sa dovoljnom tačnošću sledeći kriterij za njegovu stabilnost:

(11) $$\gamma \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \gamma_w \qquad \begin{matrix} \text{stabilnost} \\ \text{indiferentnost} \\ \text{labilnost} \end{matrix}$$

U vlažnoj atmosferi može iz svog početnog položaja da se podigne nezasićen ili zasićen vazduh. U prvom primeru je približni kriterij (2) a u drugom (11). U ovakvoj atmosferi je prema tome vazduh u svakom slučaju u stabilnom odn. labilnom stanju kada je (približno)

$$\gamma < \gamma_w \qquad \text{(apsolutna stabilnost)}$$

odn.

$$\gamma > \gamma_a \qquad \text{(apsolutna nestabilnost)}$$

Kada je

$$\gamma_w < \gamma < \gamma_a$$

govorimo o uslovnoj nestabilnosti. Pod ovim uslovom je vazduh u nestabilnom stanju samo tada kada je vodenom parom zasićen.

Konačno treba razmotriti još slučaj kada je atmosfera vodenom parom zasićena. U tom slučaju se kriterij (10) vrlo pojednostavi. Pošto je tada $q = q_w$, $T' = T$ i $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$, to tada potpuno tačno važi kriterij (11).

Na osnovu izloženog vidimo da važe tačno ili približno sledeći kriterijumi za stabilnost i nestabilnost atmosfere:

Vertikalni temp. grad.	Stanje atmosfere u pogledu stabilnosti	vrsta stabilnosti
$\gamma < \gamma_w$	Stabilna atmosfera za zasićen i nezasićem vazduh	Apsolutna stabilnost
$\gamma = \gamma_w$	Stabilna atmosfera za nezasićen i indiferentna za zasićen vazduh	
$\gamma_w < \gamma < \gamma_a$	Stabilna atmosfera za nezasićen i nestabilna za zasićen vazduh	Uslovna nestabilnost
$\gamma = \gamma_a$	Indiferentna atmosfera za nezasićen i nestabilna za zasićen vazduh	
$\gamma > \gamma_a$	Nestabilna atmosfera za nezasićen i zasićen vazduh	Apsolutna nestabilnost

11. Nivo kondenzacije

U toplim danima pri dodiru sa zemljinim tlom vazduh se zagreva. Time postaje nestabilan i počinje da se penje. U povoljnim uslovima može zagrejani vazduh da se popne do najvećih visina, čak

do stratosfere. Pri tome se hladi i kada se popne dovoljno visoko, može se u njemu pojaviti kondenzacija vodene pare. Pitamo se na kojoj visini se ona prvi put pojavi, i to pod uslovom da se kretanje vrši adijabatski. Ako pretpostavimo da je vodena para u vazduhu koji se penje u difuznoj ravnoteži sa vodenom parom u okolini ($e = e'$), onda tu visinu, tj. visinu nivoa kondenzacije, lako izračunamo.

U saglasnosti sa diferencijalnom jednačinom za specifičnu vlažnost III 10 (15) i osnovnom jednačinom statike se prilikom promene visine za dz u našem slučaju kada je

(1) $$dq = 0 \quad i \quad dQ = 0$$

relativna vlažnost promeni za

(2) $$dU = (A\gamma_a - \gamma_h)\frac{U}{T}dz$$

Očigledno je prvi član u zagradi veći od drugog, što znači da se relativna vlažnost u vazduhu koji se penje pod uslovom (1) povećava i da se posle izvesnog vremena, ukoliko se vazduh dalje penje, poveća na 100%. Ovo povećavanje zavisi samo od temperature i relativne vlažnosti. Tako je pri

$t = -20,\ 0$ i $+20^{o}C$ $\quad \frac{dU}{dz} = 7{,}0\ ,\ 5{,}8$ odn. $4{,}9\cdot 10^{-4} U\ m^{-1}$.

Ako pišemo

(3) $$\frac{1}{U}\frac{dU}{dz} = a$$

onda integralenjem ove jednačine od U do 100 dobijamo za visinu nivoa kondenzacije

(4) $$z_k = \frac{1}{a}\ln\frac{100}{U}$$

(U = relativna vlažnost na visini $z = 0$ u procentima, a = neka srednja vrednost na putu z_k). Razvijanjem desne strane u red, dobijamo odavde sa dovoljnom tačnošću

(5) $$z_k = \frac{1}{a}\,\frac{100-U}{(100+U):2}$$

Za $a = 5\cdot 10^{-4}\ m^{-1}$ (tj. približno za temperature između 10 i $30^{o}C$) je

(6) $$z_k = 4000\,\frac{100-U}{100+U}\ m$$

Nivo kondenzacije možemo da nađemo i pomoću tačke rose. Ako u jedn. (5) uzmemo u obzir jednačinu koja povezuje tačku rose sa relativnom vlažnošću (III 10 (22)), onda mesto jedn. (6) dobijamo

(7) $$z_k = \frac{A}{aT}(T - T_d)$$

Za $a = 5\cdot 10^{-4}\ m^{-1}$, $T = 290^{o}$ aps. i $A = 18$ (tablica na str. 61) je $A:(aT) = 127$. Do sličnog obrasca došao je Ferrel (1889). Ferrelov obrazac za visinu nivoa kondenzacije glasi

(8) $$z_k = 120(T - T_d).$$

Sve napisane jednačine daju nam dobre rezultate do visine oko 1000 m.

12. Meteorološki termodinamički papiri

Svestrana je upotreba termodinamičkih papira u meteorologiji. Pomoću njih lako nalazimo razne meteorološke temperature (kao što su potencijalna, virtuelna, pseudopotencijalna temperatura itd), individualne promene stanja vazduha koji se u atmosferi kreće adijabatski, pomoću njih lako prikazujemo stanje atmosfere, određujemo energiju nestabilnosti itd.

Termodinamički papiri, koji se u meteorološke svrhe sada upotrebljavaju (meteorološki termodinamički papiri), obično sadrže pored izotermi i izobara uglavnom još suve i vlažne adijabate, linije jednake specifične vlažnosti odn. jednakog odnosa smese zasićenog vazduha (izograme) i podatke o virtuelnoj temperaturi zasićenog vazduha.

Prema izboru koordinatnog sistema govorimo o Stüve-ovom termodinamičkom papiru, emagramu, tefigramu, aerogramu, rosbigramu i drugim. Koje su koordinate navedenih papira vidimo iz sledećeg pregleda:

Vrsta meteorološkog termodinamičkog papira	koordinate x	y	autor	prvi put objavljen
Dijagram H. Hertz-a	$a \ln p$	$-b \ln T$	H. Hertz	1884
Stüveov dijagram	aT	$-bp^{R:c_p}$	G. Stüve	1927
emagram	aT	$-b \ln p$	A. Refsdal	1930
tefigram	aT	$+bS$	Sir N. Shaw	1927
aerogram	$a \ln T$	$-b \ln p$	A. Refsdal	1935
rosbigram	aq	$-b\Theta$	C.G. Rossby	1930

(S = entropija vazduha, q = specifična vlažnost, Θ = potencijalna temperatura).

Konstante a i b su pozitivne i specifične za svaki dijagram. One određuju dimenzije papira. Kod originalnog Refsdal-ovog emagrama je napr. u ortogonalnom x,y sistemu

(1) $a = 0{,}5 \text{ cm grad}^{-1}$ i $b = 50 \text{ M cm}$

(M = moduo Briggs-ovih logaritama). To znači da treba u pravcu x-ose ići za 0,5 cm pa da se temperatura poveća za 1°C a u pravcu y-ose za 50 M cm odn. za 50 cm pa da se ln p odn. log p promeni za jedinicu.

Kao što smo videli ranije, jednačina suve adijabate kroz tačku (T_o, p_o) glasi (str. 86)

(2) $T:T_o = (p:p_o)^{R:c_p}$ ili $c_p(\ln T - \ln T_o) = R(\ln p - \ln p_o)$

U termodinamičkom papiru Hertz-a i Stüve-a ona ima oblik .

(3) $a c_p (y - y_o) = bR(x_o - x)$ gde je $x_o = a \ln p_o$ i $y_o = -b \ln T_o$

odn.

(4) $x:x_o = y:y_o$ gde je $x_o = aT_o$ i $y_o = -bp_o^{R:c_p}$

Vidimo da su i u jednom i u drugom dijagramu suve adijabate prave. U Hertzovom dijagramu međusobno su paralelne, a u Stüveovom idu prema tački

$$x = aT = 0\ , \qquad y = -b\,p^{R:c_p} = 0$$

koja se svakako ne nalazi na papiru samom (sl. 25).

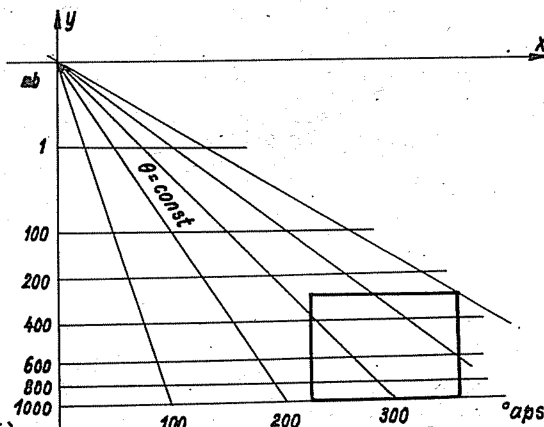
U originalnom Refsdal-ovom emagramu jednačina suve adijabate glasi

(5) $b\,c_p \ln(x:x_o) = R\,(y_o - y)$ gde je $x_o = aT$ i $y_o = -b \ln p_o$

Ovde suve adijabate nisu prave linije. Nagib ovih linija prema x-osi

(6) $$-\frac{dy}{dx} = \frac{bc_p}{Rx}$$

ništa ne zavisi od pritiska (y) i sa temperaurom (sa x) se smanjuje. Pošto je na originalnom emagramu $bc_p:R = 75,8$ cm a $x = aT^p$ se kreće u granicama 0,5·228 i 0,5·308cm (sl. 26), to lako izračunamo da makoja suva adijabata na ovom emagramu gradi sa x-osom, tj. sa izobarom, ugao koji se kreće u granicama između 30 i 42°. Adijabate se spuštaju sa leve na desnu stranu (6).



Sl. 25
Stüve-ov papir

Prema jedn. (5) kroz svaku tačku ide jedna i samo jedna suva adijabata. Zamislimo sada dve suve adijabate. Jedna neka ide kroz tačku $T(x_o, y_o)$, a druga kroz tačku $T_1(x_1 = x_o, y_1)$ koja leži na istoj izotermi. Jedn. (5) je jednačina prve adijabate, a jednačina druge je slična ovoj, samo mesto y_o stoji u njoj y_1. Ako oduzmemo jednu jednačinu od druge i smatramo da je x i kod jedne i kod druge jednako (presek adijabata sa izotermom), vidimo da je otstojanje jedne adijabate od druge u pravcu izoterme svuda jednako. Ono iznosi $y_o - y_1$.

Lako se možemo uveriti da se u emagramu i vlažne adijabate (V 6 (7)) spuštaju sa leve na desnu stranu. Za razliku od suvih adijabata, one nisu paralelne među sobom.

Svakom pritisku p i svakoj temperaturi T pripada neki maksimalni odnos smese

(7) $$r_w = 0,622\,\frac{e_w}{p_s} = 0,622\,\frac{e_w}{p - e_w}$$

i jednačina krive koja povezuje tačke jednakog odnosa smese zasićenog vazduha (izograme) glasi

(8) $$r_w = r_{w1} = \text{const}$$

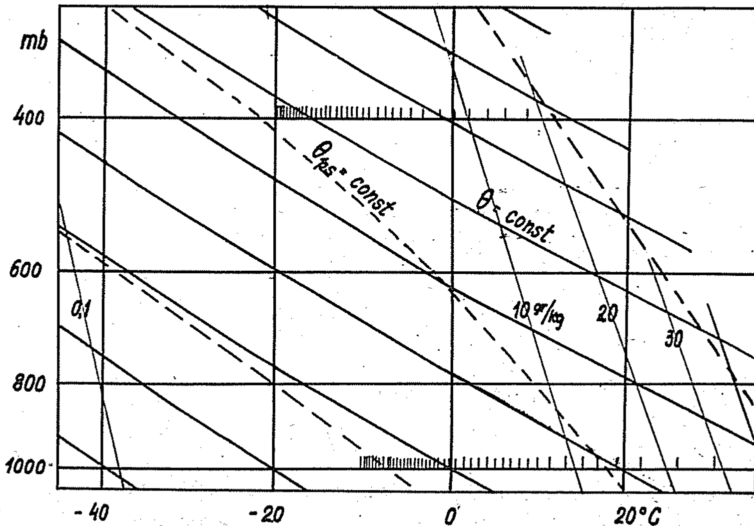
Diferenciranjem jedn. (7) kad uzmemo u obzir jedn. (8) dobijamo

(9) $$\frac{dp}{p} = \frac{de_w}{e_w}$$

i odavde, kad uzmemo u obzir Clausius-Clapeyron-ovu jednačinu i podatke iz pregleda na str. 99, diferencijalnu jednačinu izograme u emagramu

(10) $$-\frac{dy}{dx} = \frac{bA}{x}$$

I u ovom slučaju, kao kod suvih adijabata, nagib $\left|\frac{dy}{dx}\right| = -\frac{dy}{dx}$ ništa ne zavisi od pritiska (y) već se sa temperaturom (sa x) smanjuje. Zbog toga je i otstojanje u pravcu y između dve izograme konstantno, kao kod suvih adijabata. I one se spuštaju sa leva na desno sa velikim nagibom. **Praktično su prave linije.**



Sl. 26
Glavne karakteristike originalnog Refsdal-ovog emagrama
(nagib krivih verno prikazan)

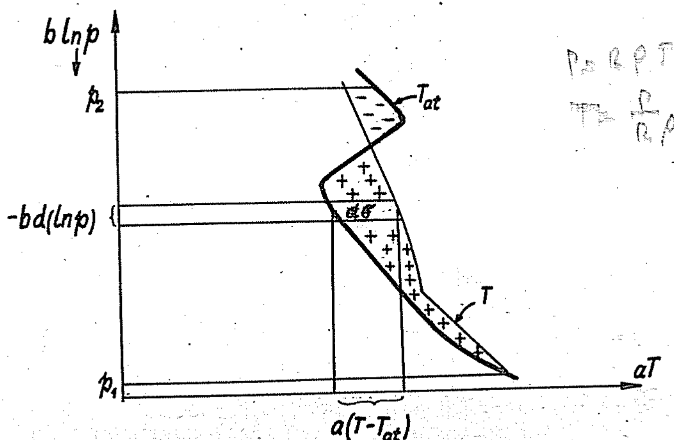
Na izobarama emagrama 1000, 900 mb itd. nacrtane su uspravne crtice pomoću kojih se određuje virtuelna temperatura zasićenog vazduha. Otstojanje između dve susedne crtice (0,5 cm = 1°C itd.) znači virtuelni dodatak T_v - T zasićenog vazduha koji je pod onim

pritiskom i ima onu temperaturu koji odgovaraju mestu na emagramu gde se te dve crtice nalaze. Tako je napr. pri pritisku p = 900mb i temperaturi T = 288° aps. **virtuelni dodatak zasićenog vazduha** 2,0°C.

Pošto je $T_v - T = 0,378\, e_w T:p$, gde je e_w samo funkcija temperature, to se virtuelni dodatak zasićenog vazduha a njime otstojanje između crtica sa smanjivanjem pritiska a pri stalnoj temperaturi povećava (sl. 26).

Poznavanjem virtuelnog dodatka za zasićeni vazduh lako nalazimo i virtuelni dodatak za nezasićeni vazduh. Ako uzmemo u obzir definiciju relativne vlažnosti U (str. 62), vidimo da sa dovoljnom tačnošću dobijamo stvarni virtuelni dodatak na taj način da maksimalni (za zasićeni vazduh) množimo sa U:100.

Pomoću emagrama jednostavno nalazimo i energiju nestabilnosti. U ovu svrhu treba u emagramu prvo nacrtati <u>krivu stanja atmosfere</u> $T_{at} = T_{at}(p)$ (sl. 27), tj. krivu koja daje temperaturu atmosfere kao funkciju pritiska prema stvarnim merenjima u atmosferi (napr. pomoću radiosondaže). Pored toga treba nacrtati i



Sl. 27

Određivanje energije nestabilnosti pomoću emagrama

<u>individualnu krivu stanja</u> T = T(p) delića vazduha za koji želimo da odredimo energiju nestabilnosti. Slično nam individualna kriva stanja daje temperaturu T kao funkciju atmosferskog pritiska p u deliću koji se kreće adijabatski.

Energija nestabilnosti određuje se površinom koju sačinjavaju delovi krive stanja atmosfere i individualne krive stanja i dva otsečka u pravcu koordinate x (šrafirana površina na sl. 27). Elemenat takve površine oblika trapeza sa srednjom linijom $a(T - T_{at})$ je očigledno

$$d\sigma = - a(T - T_{at})\, b\, d(\ln p)$$

Integralenjem od p_1 (pritisak pod kome se nalazi delić vazduha za koji u odnosu na pritisak p_2 određujemo njegovu energiju nestabilnosti) do p_2 dobijamo površinu

$$(11) \qquad \sigma = - ab \int_{p_1}^{p_2} (T - T_{at})\, d(\ln p)$$

U atmosferi je razlika $T - T_{at}$ praktično jednaka razlici u virtuelnim temperaturama i ova površina je zbog toga praktično srazerna energiji nestabilnosti (9 (6)) vazdušnog delića koji je pod pritiskom p_1 u odnosu na pritisak p_2. Upoređenjem površine σ sa jedn. 9 (6), vidimo da je energija nestabilnosti delića vazduha mase m

$$(12) \qquad L = \frac{R_s}{ab}\, m\, \sigma$$

U originalnom Refsdalovom emagramu je

$$\frac{R_s}{ab} = 26{,}4 \text{ džaula/kg cm}^{2}$$

što znači da površina $\sigma = 1$ cm^2 pretstavlja energiju nestabilnosti od 26,4 džaula po kilogramu vazduha.

U saglasnosti sa gornjim izvođenjima treba smatrati površinu koja leži na levoj strani individualne krive stanja pozitivnom a onu koja leži na desnoj strani negativnom. Zbog jednostavnosti određivanja energije nestabilnosti ima Refsdalov dijagram koordinate T i ln p. Izraz emagram potiče od reči e-nergija i ma-sa.

Originalni Refsdalov emagram za obradu radiosondažnih podataka nije podesan. On je bio zgodan za obradu podataka od avionskih uzdizanja kod kojih je bio plafon otprilike 500 mb. Danas se upotrebljavaju razne druge vrste emagrama, kod nas npr. isti kao u francuskoj meteorološkoj službi kod koga koordinata temperature sa koordinatom pritiska (ln p) zaklapa ugao od 45°. U tom dijagramu (sl. 28) se pri velikim pritiscima temperatura kreće između − 30 i + 40°C a pri malim (od 100 do 200 mb) između − 25 i − 80°C.

Teorija kosouglog emagrama potpuno je slična teoriji originalnog Refsdalovog. U spomenutom, koji se danas upotrebljava kod nas, je a = 0,4 cm i b = 50M, b je dakle isto toliko koliko je kod originalnog emagrama (1). Površina $\sigma = 1$ cm^2 pretstavlja energiju nestabilnosti od

$$\frac{R_s}{ab}\sqrt{2} = 46{,}7 \text{ džaula/kg}$$

Faktor $\sqrt{2}$ stoji zbog toga što površini σ (11) u originalnom emagramu odgovara $\sqrt{2}$ puta manja površina u posmatranom kosouglom.

Emagram možemo upotrebiti i za manje pritiske od onih koji su na papiru naznačeni. Na emagramu je naime

$$(13) \qquad y - y_o = - b \ln \frac{p}{p_o} = - b \ln \frac{np}{np_o}$$

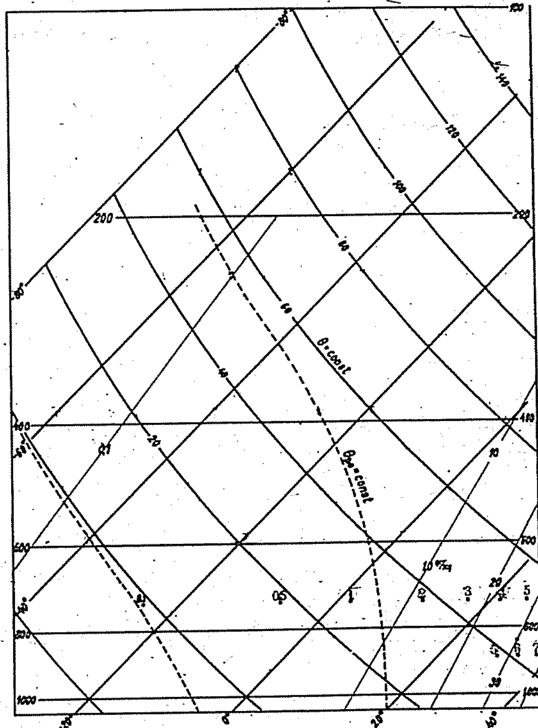
Mesto skale 300 do 150 mb možemo npr. upotrebiti skalu od 100 do

50 mb itd. Ako uzmemo jedn. (13) u jedn. (2) i (5) u obzir, vidimo da nacrtane suve adijabate važe i za novu numeraciju.

U kosouglom emagramu koji se upotrebljava kod nas izoterme i izobare su smeđe boje a suve i vlažne adijabate su zelene. Vlažne adijabate su isprekidane linije (sl. 28). I taj emagram sadrži podatke o virtuelnoj temperaturi zasićenog vazduha. Ovi podaci dobijaju se pomoću označenih crvenih tačkica na izobari p = 730 mb i delom na izobari p = 880 mb (sl. 28). Brojevi pored tačkica znače razlike između virtuelne i stvarne temperature zasićenog vazduha pri temperaturi i pritisku kojima je određen položaj tačkica. Te podatke možemo upotrebiti i za druge pritiske, ako uzmemo u obzir da se u pravcu izograma (r_w = const) koje idu pod srazmerno malim nagibom prema izotermama (sl. 28 i 29), virtuelna tempera - tura praktično ne menja. Mesto izograma specifične vlažnosti ko - sougli emagram sadrži izograme odnosa smese. Taj emagram sadrži konačno još podatke o otstojanju standardnih izobarskih površina. I ovi podaci dati su u vidu numerisanih tačkica. Brojevi iznad tačkica pretstavljaju debljine slojeva vazduha u hektometrima sa srednjom virtuelnom temperaturom sloja koju određuje izoterma na kojoj se tačkica nalazi.

Na koje slojeve odnose se podaci daje nam sledeći pregled:

red tačkica odozdo	sloj uzmeđu milibara
1.	1000 i 850
2.	1000 i 700
3.	700 i 500
4.	500 i 300
5.	300 i 200
6.	200 i 150
7.	150 i 100 mb



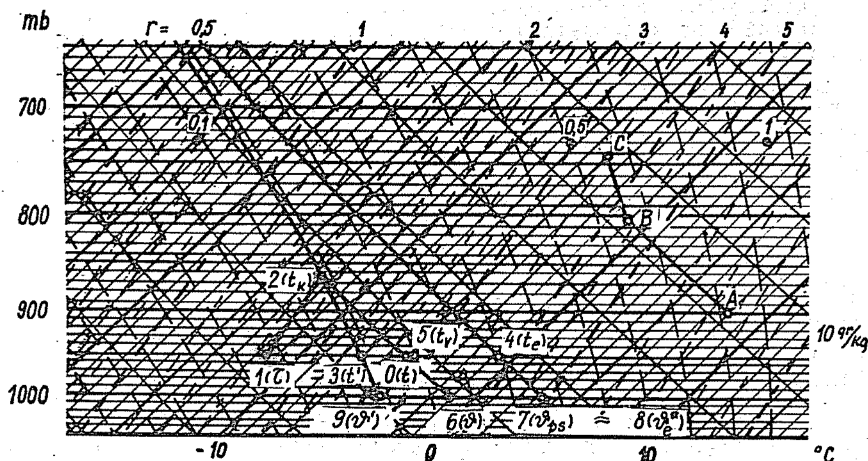
Sl. 28
Glavne karakteristike kosouglog emagrama
(nagib krivi verno prikazan)

13. Praktična primena emagrama

Već smo spomenuli da je u meteorologiji praktična primena termodinamičkih papira svestrana. Kako se može pomoću njih, i to pomoću emagrama, da odredi energija nestabilnosti već smo videli. Ovde nas interesuju i druge primene emagrama.

Delić vazduha mase m = 1 kg neka ima pri pritisku p = 900 mb i temperaturi t = 8°C relativnu vlažnost U = 60%. Pitamo se koliki bi bili pritisak i temperatura u tom vazduhu kad bi se adijabatski popeo do nivoa kondenzacije, tj. do visine gde bi se u njemu prvi put pojavila kondenzacija. Dalje se pitamo koliki bi bio pritisak i koliko bi se kondenzovalo vodene pare u tom vazduhu kad bi se adijabatski popeo do visine gde bi mu se temperatura smanjila na - 5°C.

Na emagramu je početno stanje pretstavljeno tačkom A (sl.29).



Sl. 29
Iznalaženje nekih vrednosti pomoću emagrama

Taj vazduh se na početku penje po suvoj adijabati i pri tome se njegov odnos smese ne menja. Očigledno je sa dovoljnom tačnošću $r = \frac{U}{100} r_w$ gde je r_w odnos smese zasićenog vazduha pri početnom pritisku (p = 900 mb) i početnoj temperaturi (t = + 8°C). Kao što vidimo iz emagrama je $7 < r_w < 8$ g/kg. Jednostavnom interpolacijom, uzimajući u obzir da se otstojanje nacrtanih izograma sa leva na desno smanjuje, dobijamo r_w = 7,4 g/kg, tako da je r = 0,6· 7,4 g/kg = 4,4 g/kg.

Odnos smese r = 4,4 g/kg ostaje konstantan sve do nivoa kondenzacije, do tačke B koja leži na suvoj adijabati kroz tačku A i na izogrami r_w = 4,4 g/kg. Tamo je $p = p_k$ = 804 mb i t =

t_k = - 1,0°C.

Penjući se od nivoa kondenzacije naviše vazduh se hladi po vlažnoj adijabati i u tački C gde je p = 742 mb njegova temperatura se smanji na - 5°C. Tačka C leži na izoliniji r_w = 3,5 g/kg, što znači da je iz posmatranog delića mase m = 1kg ispalo 4,4 - 3,5 grama= 0,9 grama kondenzovane vode.

Pomoću emagrama lako odredimo i meteorološke temperature vazduha.

Neka ima vazduh pri pritisku p (= 950 mb) i temperaturi t (= - 5°C) relativnu vlažnost U (= 60%). Pitamo se kolike su
tačka rose τ,
temperatura na nivou kondenzacije t_k,
temperatura mokrog termometra t',
ekvivalentna temperatura t_e, ANALIZA VREMENA, D. RADINOVIĆ 38.
virtuelna temperatura t_v,
potencijalna temperatura $\vartheta = \theta - 273,2$
pseudopotencijalna temperatura ϑ_{ps},
potencijalna temperatura sa ekvivalentnim dodatkom ϑ_e^*, STRANA 90
potencijalna temperatura mokrog termometra ϑ'
tog vazduha.

Na emagramu je stanje posmatranog vazduha pretstavljeno tačkom O (sl. 29). Na isti način kao pre nađemo odnos smese r. Tačka 1(τ) gde izograma r_w = r = const seče izobaru p (= 950 mb) daje tačku rose τ. Na preseku izograme r = const kroz tačku 1(τ) i suve adijabate kroz tačku O(t) leži tačka 2(t_k) koja nam daje temperaturu na nivou kondenzacije. Ako se od tačke 2(t_k) spustimo po vlažnoj adijabati do početne izobare p = const, dođemo do tačke 3(t') koja nam, u saglasnosti sa ranijim izvođenjima (str. 91), daje sa dovoljnom tačnošću temperaturu mokrog termometra. Ustvari nam ova temperatura definiše tzv. pseudotemperaturu mokrog termometra, koja može da bude najviše za nekoliko desetih delova manja od temperature mokrog termometra. Ekvivalentnu temperaturu daje nam tačka 4(t_e) koja leži za 2,5q° desno od tačke O na istoj izobari. Virtuelnu temperaturu određujemo pomoću virtuelnog dodatka $0,622q_wTU:100$ koji se jednostavno odredi na gore opisani način (str. 102). Dodavanjem ovog dodatka stvarnoj temperaturi t, nalazimo tačku 5(t_v) kojom je određena virtuelna temperatura.

Pomoću tačke 6(ϑ) koja leži na preseku izobare p = 1000 mb i suve adijabate kroz tačku O(t) dobijamo potencijalnu temperaturu. Za dobijanje pseudopotencijalne temperature treba od tačke 2(t_k) prvo da idemo tako visoko po pseudoadijabati da ta pseudoadijabata teče (praktično) paralelno sa suvim adijabatama, a posle da se po suvoj adijabati spustimo do tačke 7(ϑ_{ps}) koja leži na izobari p = 1000 mb i koja nam daje pseudopotencijalnu temperaturu. Potencijalnu temperaturu sa ekvivalentnim dodatkom dobijamo jednostvno dodavanjem dodatka za ekvivalentnu temperaturu 2,5q potencijalnoj temperaturi. Određena je tačkom 8(ϑ_e^*). Sa dovoljnom tačnošću nalazimo konačno potencijalnu temperaturu mokrog termometra. Ovu nam daje tačka 9(ϑ') koja leži na preseku izobare p = 1000 mb i pseudoadijabate kroz tačku 3(t'). Slično kao temperatura mokrog termometra je i ova samo približna, pošto ona ustvari pretstavlja pseudopotencijalnu temperaturu mokrog termometra, tj. temperaturu

koja može da bude od potencijalne temperature mokrog termometra najviše za nekoliko desetih delova stepeni manja.

Po zasluzi naglog razvoja vazdušnog saobraćaja i potrebi za meteorološkim obezbeđenjem tog saobraćaja danas se više puta dnevno na bezbroj mesta meri stanje viših slojeva atmosfere. Merenja se vrše vertikalnim uzdizanjima meteoroloških aparata pomoću kojih se dobiju podaci o pritisku, temperaturi, vlažnosti i vetru na visini. Podaci o vetru dobijaju se i puštanjem pilot-balona, koji se naročitim teodolitima prate prilikom kretanja u atmosferi, a danas i pomoću radiosondaže, tj. pomoću radiosonda koje se privezane za balon punjen vodonikom ili heliumom puštaju u atmosferu. Radiosonda emitovanjem ultrakratkih elektromagnetskih talasa omogućuje određivanje pritiska, temperature i vlažnosti vazduha na visini, a često i položaj u prostoru gde se ona nalazi (sistem radiogoniometrije ili radiolokacije). U periodu između dva svetska rata ti podaci na visini dobijali su se prvenstveno pomoću meteorografa koji su se pričvršćivali za avion i pomoću pilot-balona. Takvi avioni su retko prelazili visinu 5500 m. Danas se merenje atmosfere radiosondažom vrši do visina oko 30 km. Pronalaskom raketa i veštačkih satelita pružaju se nove neslućene mogućnosti u pogledu merenja i istraživanja viših i najviših slojeva atmosfere.

Na osnovu podataka koje nam daje radiosonda ili meteorograf nacrtamo u emagramu sve markantne tačke stanja atmosfere, koje leže uglavnom na onim mestima gde se vertikalni temperaturni gradijent promeni. Na taj način atmosferu podelimo na slojeve sa konstantnim temperaturnim gradijentom. Povezivanjem tih tačaka dobijamo liniju stanja atmosfere, tj. temperaturu atmosfere kao funkciju pritiska.

Zadatak je sada da nađemo temperaturu kao funkciju visine.

Pomoću jednačina na str. 71 dobijamo za debljinu makog sloja vazduha

(1) $$\Delta \phi = 18423(1 + \alpha t_{vs}')(\log p_1 - \log p_2) \text{ gpm}$$

(p_1, p_2 = pritisak na donjoj odn. gornjoj granici sloja). Kad bi bila srednja virtuelna temperatura t_{vs}' tog sloja jednaka nuli, onda bi to otstojanje bilo

(2) $$\Delta \phi_o = 18423(\log p_1 - \log p_2) \text{ gpm}$$

Pri srednjoj virtuelnoj temperaturi t_{vs}' je prema tome otstojanje jedne izobarske površine (p_1 = const) od druge (p_2 = const) za

(3) $$\Delta \phi - \Delta \phi_o = \alpha t_{vs} \Delta \phi_o \text{ gpm}$$

veće od otstojanja koje bi postojalo pri srednjoj virtuelnoj temperaturi sloja $t_{vs}' = 0$. Ova razlika je jednostavno srazmerna srednjoj virtuelnoj temperaturi t_{vs}' sloja i debljini tog sloja sa virtuelnom temperaturom 0^oC.

Međusobna otstojanja nekih (standardnih) izobarskih površina za $t_{vs}' = 0$ i koliki može da bude uticaj temperature (virtuelne) na te vrednosti daje nam tablica.

p_1 =	1000,0	850,0	700,0	500,0	300,0 mb	
p_2 =	850,0	700,0	500,0	300,0	100,0 mb	
$\Delta\phi_o$ =	1299	1553	2691	4085	8245 gpm	za $t_{vs} = 0^oC$
$\Delta\phi - \Delta\phi_o$ =	± 47,6	56,9	98,6	150	215 gpm	za $t_{vs} = \pm 10^oC$

Pri dva, tri,.. puta većoj ili manjoj temperaturi (po Celziusu) bile bi ove razlike dva, tri,.. puta veće odn. manje.

Prilikom određivanja debljine sloja treba imati na umu da pogrešan podatak o pritisku prilično utiče na rezultat. Ako je pritisak izmeren sa tačnošću na cele milibare (sonda ne daje veću tačnost), onda veće visine mogu da budu određene sa tačnošću svega na nekoliko desetina metara.

Pomoću kosouglog emagrama mogu se debljine slojeva atmosfere koji su ograničeni od standardnih izobarskih površina neposre-dno odrediti. Time jednostavno dobijamo krivu visine pomoću koje nalazimo temperaturu i pritisak vazduha na makojoj visini.

Sledeći primer pokazuje nam kako dođemo do prikaza stanja atmosfere na kosouglom emagramu na osnovu podataka dobivenih radiosondažom. Prikaz se odnosi na stanicu Beograd i na dan 9. I. 1958 u 01 čas (vreme puštanja). Stanica se nalazi na Zelenom Brdu na visini 243 m = 243 gpm.

Na raspoloženju nam stoje sledeći podaci, koji se odnose na markantne (karakteristične) tačke i standardne nivoe:

Beograd, 9. I. 1958 u 01 čas

p	t	t_d	U
1000			
989,5	- 2,3	- 5,4	80
850	- 12,2	- 15,5	
784	- 17,4	- 21,9	67
752	- 14,8	- 25,1	37
700	- 18,5		
570	- 28,1	- 35,2	47
552	- 27,7	- 37,0	37
500	- 33,5		
462	- 37,3	- 42,1	58
400	- 44,2		
338	- 51,8		
300	- 52,0		
286	- 51,8		
278	- 49,5		
227	- 45,0		
200	- 47,5		
164	- 48,1		
150	- 51,2		
138	- 49,7		
117	- 55,8		
100	- 56,2		
80	- 57,6		

(p u mb, t i t_d u ^oC i U u%)

Unošenjem podataka za pritisak i temperaturu u emagram dobijamo krivu stanja atmosfere iznad Beograda približno u 01 čas navedenog dana. Podaci se ne odnose na određeni trenutak vremena pošto su dobiveni sondom koja se penje srazmerno sporo, brzinom 200 do 300 m/min.

Prvo je pitanje na kojim visinama nalazimo pojedine vrednosti. U tu svrhu se konstruiše, već spomenuta, kriva visine.

Kad nama stoji na raspoloženju kosougli emagram, kriva visine se konstruiše pomoću krive stanja atmosfere i numerisanih tačaka koje nam daju otstojanja standardnih izobarskih površina. Koriste se i posebne tablice za iznalaženje 1000 milibarske površine. Pomoću takvih tablica nalazimo da se u našem slučaju ta površina nalazi 83 m ispod stanice. Sada tražimo međusobno otstojanje izobarskih površina 1000 i 850 mb. To otstojanje jednako je otstojanju između takve dve površine kad bi one graničile sloj sa svuda jednakom virtuelnom temperaturom koja bi

bila jednaka srednjoj barometarskoj virtuelnoj temperaturi T_{vs}, tj. približno srednjoj temperaturi T_s tog sloja. Temperaturu T_s nalazimo grafički i to pomoću izoterme T_s = const. Tu izotermu treba samo tako povući da su površine koje su na sl. 30 šrafirane međusobno jednake. Dodavanjem dodatka $T_{vs} - T_s$ dobijamo traženu temperaturu T_{vs}. Izoterma T_{vs} = const seče red numerisanih tačkica za debljinu sloja 1000 do 850 mb u nekoj tački pomoću koje interpolacijom obmah dobijamo debljinu tog sloja pri srednjoj temperaturi T_{vs}. Ako nađenoj vrednosti dodamo visinu 1000 mb površine (= 243 - 83 gpm) dobijamo apsolutnu visinu 850 mb površine.

Sličnim postupkom nađemo i visine ostalih standardnih izobarskih površina i time potrebne elemente za crtanje krive visine. Ona se ucrtava u poseban koordinatni sistem na istom emagramu (sl. 30). Pomoću te krive jednostavno nalazimo temperaturu i pritisak, a za donji deo prikazane atmosfere i tačku rose i relativnu vlažnost na makojoj visini.

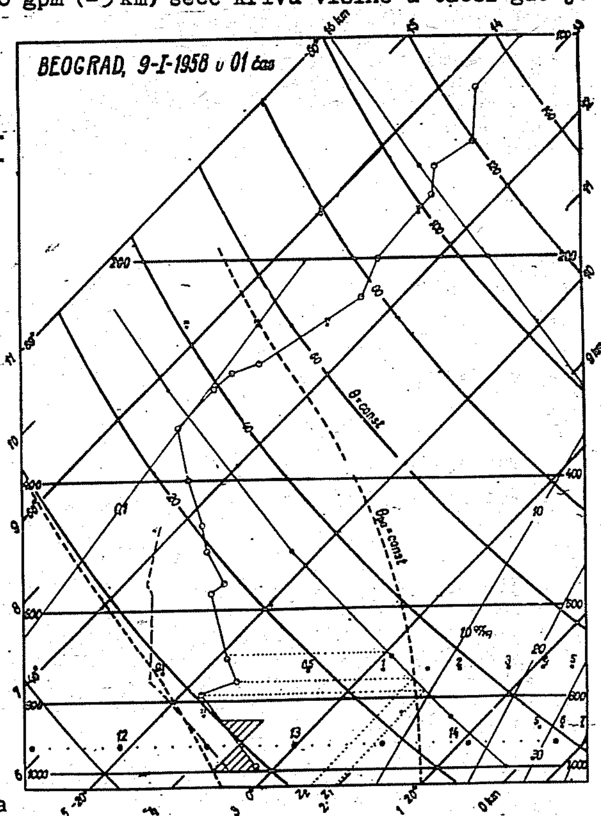
Sada se pitamo koliki su pritisak i temp. na visini 3000 gpm.

Izohipsa $\emptyset$ = 3000 gpm (=3 km) seče krivu visine u tački gde je pritisak p = 690 mb (sl. 30). Ova izobara seče krivu stanja atmosfere u tački gde je temperatura -19,2 °C. Prema tome je bila tada iznad Beograda na visini 3000gpm pri pritisku 690 mb temperatura -19,2°C.

Iz podataka u tablici na str. 108 vidimo da je od visine z_1 gde je bio pritisak p_1 = 784 mb pa do visine z_2 gde je bio pritisak p_2= 752 mb temperatura porasla za 2,6°. Pitanje je kolike su visine z_1 i z_2.

Izobare p_1 i p_2 seku krivu vis-ine u tačkama koje nam neposredno daju tražene visine. Na taj način dobijamo da je (sl. 30) z_1 = 2050m i z_2 = 2360 m.

Na potpuno sličan način nalazimo podatke o tački rose i relativne vlažnosti na visinama. Na slici je prikazana samo kriva tačke rose.



Sl.30.Radiosondaža u Beogradu 9.I.1958

VI. ZRAČENJE

1. Osnovni zakoni zračenja

Sunce upućuje na Zemlju dan na dan ogromne količine energije. Glavni deo dolazi u vidu toplotnog zračenja brzinom svetlosti ($3 \cdot 10^8$ m sec^{-1}) a manji deo sporije u vidu korpuskularnog zračenja. Ova energija se delom od Zemlje odbija, a delom se na Zemlji pretvara u razne druge vrste energije i konačno u energiju toplotnog zračenja koja se brzinom svetlosti ponovo vraća u vasionu.

1. Zračenje je sveopšta pojava. Makoje telo, bilo da je u čvrstom, tečnom ili gasovitom stanju, neprestano zrači - emituje energiju toplotnog elektromagnetnog zračenja u okolinu. S druge strane svako telo i neprestano u većoj ili manjoj meri upija - apsorbuje ovu vrstu energije koju zrače okolna tela.

Uopšte možemo svaki molekul odn. atom smatrati povremenim izvorom i ponorom energije elektromagnetskog zračenja. Među molekulima tela ne postoji prema tome samo stalna razmena kinetičke energije, do koje dolazi prilikom sudara molekula, već postoji i stalna razmena energije koju svaki molekul poseduje i u vidu elektromagnetskog zračenja čas prima čas daje. Molekuli apsorbuju samo zračenje određenih talasnih dužina i energija I koja u vidu elektromagnetskog zračenja dolazi do tela razdeli se na tri dela, na deo A koje telo apsorbuje, na deo R koji se od molekula ili atoma tela odbija (reflektuje) i na deo P koji telo propušta (transmituje), dakle

(1) $$A + R + P = I$$

Deljenjem ove jednačine sa I dobijamo

(2) $$a + r + p = 1$$

gde se količnici (pravi razlomci)

(3) $$a = \frac{A}{I} \quad r = \frac{R}{I} \quad p = \frac{P}{I}$$

zovu moć apsorpcije, moć refleksije odn. moć transmisije tela.

Moć refleksije sastoji se iz dva dela

(4) $$r = r_p + r_d$$

od kojih prvi (r_p) se odnosi na pravilnu refleksiju (snop zraka odbija se kao snop) a drugi na difuznu refleksiju (zraci se odbijaju na sve strane). Slično se pri propuštanju javlja pravilna i difuzna transmisija (p_p i p_d). Za svetlosne zrake većih talasnih dužina je za atmosferu p_p neuporedivo veće od p_d, dok je suprotno tome za svetlosne zrake malih talasnih dužina i za ultraljubičasto zračenje p_d veće od p_p.

Veličine a, r i p zavise od sastava tela, od osobina njegove površine, od temperature tela i talasne dužine, tako da su za zra-

ke različitih talasnih dužina vrednosti a, r i p uopšte različite. Kada se ove vrednosti odnose na zračenje određene talasne dužine λ tada govorimo o moći apsorpcije, refleksije i transmisije za zračenje talasne dužine λ (a_λ, r_λ, p_λ).

Telo za koje je pri svakoj talasnoj dužini $a_\lambda = 1$, $r_\lambda = p_\lambda = 0$ zove se apsolutno (potpuno) crno. Telo za koje je $a_\lambda = const < 1$ za svako λ zove se sivo telo. Slično govorimo o potpuno belim ($r = r_d = 1$, $p = a = 0$) i potpuno providnim telima ($p = 1$, $a = r = 0$). Tela sa navedenim osobinama u prirodi ne postoje, ali za zračenje određenih talasnih dužina mogu biti tela potpuno crna, bela i providna. Tako je napr. staklo potpuno crno za ultraljubičaste i infracrvene zrake a potpuno providno za svetlosne zrake. Sveži suvi sneg je napr. za svetlosne zrake praktično potpuno belo telo, dok je za zračenje talasnih dužina većih od 10μ praktično potpuno crno telo (Falkenberg: $a = 0{,}995$ za $\lambda > 10\mu$)

2. Neke veličine zračenja:

a. Količina zračenja S je energija koju u određeno vreme emituje izvor zračenja. Njena merna jedinica je erg ($= g\ cm^2 sec^{-2}$)= vatsekunda ili kalorija.

b. Gustina zračenja $G = S:V$ je deo količine zračenja koji u određenom trenutku sadrži jedinica zapremine ($[G] = [g\ cm^{-1} sec^{-2}]$).

c. Struja zračenja $U = S:t$ je količina zračenja koju u jedinici vremena emituje izvor zračenja ($[U] = [g\ cm^2 sec^{-3}]$).

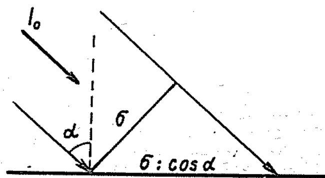
d. Gustina struje zračenja koja se naziva i intenzitet zračenja $E = U:F$ je struja zračenja koja prolazi kroz jedinicu površine stojeće normalno na zrake ($[E] = [g\ sec^{-3}] = [cal\ cm^{-2} sec^{-1}]$).

e. Jačina obasjavanja I je struja zračenja koja dolazi na jedinicu površine ($[I] = [g\ sec^{-3}]$)

3. Kosinusni stav. Kad pod upadnim uglom α dolazi na neku površinu struja zračenja intenziteta I_0, onda je jačina obasjavanja upadnog zračenja

(5) $$I = I_0 \cos\alpha$$

(sl. 31).



Sl. 31
Cosinusni stav

4. Kirchhoff-ljev zakon. Ako potpuno crno telo temperature T sa jedinice površine u jedinici vremena emituje $E_{\lambda T}$ toplotne energije u vidu zračenja talasnih dužina spektralnog područja $\lambda \pm d\lambda:2$, ako je drugim rečima $E_{\lambda T}$ intenzitet zračenja potpuno crnog tela temperature T za spektralnu oblast $\lambda \pm d\lambda:2$, onda je intenzitet zračenja tela sa moći apsorpcije $a_{\lambda T}$ pri temperaturi T za istu spektralnu oblast

(6) $$e_{\lambda T} = a_{\lambda T} E_{\lambda T} \qquad [e_{\lambda T}] = [cal\ cm^{-2} sec^{-1}]$$

Moć apsorpcije potpuno crnog tela ($a_\lambda = a = 1$) veća je od

makoje druge. Zbog toga je i zračenje potpuno crnog tela veće od zračenja makog drugog tela jednake temperature. Količnik $e_{\lambda T}:a_{\lambda T} = E_{\lambda T}$ koji je funkcija samo temperature i talasne dužine i ne zavisi od prirode tela, konstantan je za sva tela. Kirchhoff-ljev zakon ne isključuje mogućnost da je $e_{\lambda T} = a_{\lambda T} = 0$, i tela mogu da budu za elektromagnetsko zračenje izvesnih talasnih dužina, kao što je već spomenuto, potpuno providna. Mnoga tela, a naročito gasovi, apsorbuju samo zrake određenih talasnih dužina, tj. u saglasnosti sa jedn. (6), one koje i emituju.

5. Planck-ov zakon zračenja. Podelu energije u spektru potpuno crnog tela daje nam Planck-ova formula

(7) $$E_{\lambda T} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}$$

($E_{\lambda T}$ = intenzitet zračenja potpuno crnog tela temperature T za spektralno područje $\lambda \pm \frac{1}{2}$, c_1 i c_2 su konstante). Za tumačenje je zgodno da ovoj jednačini damo sledeći oblik:

(8) $$\frac{E_{\lambda T}}{T^5} = \frac{c_1 (\lambda T)^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} = f(\lambda T)$$

Funkcija $f(\lambda T)$ je kontinuarna i uvek pozitivna, sem za $T = 0$ i ∞, kada je jednaka nuli. Zbog toga postoji pri nekoj vrednosti

(9) $$a = (\lambda T)_M$$

argumenta λT, koji leži između 0 i ∞, maksimum te funkcije.

Neka se u argumentu a menja samo λ, što znači da se naše posmatranje odnosi na potpuno crno telo stalne temperature T. U tom slučaju je očigledno $f(\lambda T)$ maksimum pri talasnoj dužini

(10) $$\lambda_M = \frac{a}{T}$$

Time smo dobili poznati Wien-ov zakon pomeranja (1893) prema kome je talasna dužina zračenja maksimalnog intenziteta potpuno crnog tela obrnuto srazmerna njegovoj apsolutnoj temperaturi. Vidimo da se sa povećavanjem temperature potpuno crnog tela talasna dužina zračenja maksimalnog intenziteta pomera prema kratkim talasima.

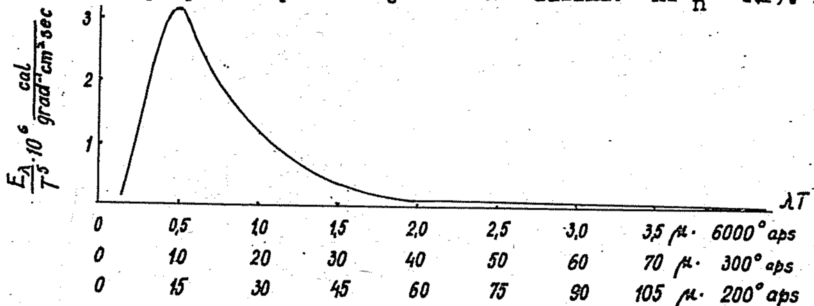
Po Lummer-u i Pringsheim-u je

(11) $$a = 2940\,\mu\,\text{grad}$$

($1\,\mu = 10^{-3}$ mm).

Funkcija $f(\lambda T)$ zavisi samo od λT. Kad pretstavimo sebi ovu funkciju grafički ($f(\lambda T) = E_{\lambda T} T^{-5}$ ordinata, λT apscisa), onda nam ovaj prikaz (sl. 32) odmah daje i intenzitet zračenja crnog tela

makoje temperature T kao funkciju talasne dužine (n puta većoj temperaturi pripada n puta manja talasna dužina: $nT\cdot\frac{\lambda}{n} = \lambda T$). Na



Sl. 32
Spektar emisije crnog tela

slici vidimo da izabranim temperaturama 6000° (otprilike temperatura Sunca) i 300 i 200°aps. (otprilike granične temperature u atmosferi) pripadaju pri istoj vrednosti funkcije različite talasne dužine. Iz slike vidimo dalje da je maksimalni intenzitet zračenja potpuno crnog tela temperature T = 6000, 300 i 200° aps. vezan za talase λ_M = 0,5, 10 odn. 15 μ. Zbog toga pada najveći intenzitet zračenja atmosfere (gde su temperature između 200 i 300° aps.) u oblast infracrvenog toplotnog zračenja talasnih dužina između 10 i 15 μ. U vezi s tim možemo se potsetiti da su pojedine oblasti spektra sledeće: 0,29 μ - ultraljubičasto - 0,36 - ljubičasto - 0,424 - plavo - 0,492 - zeleno - 0,535 - žuto - 0,586 - narandžasto - 0,647 - crveno - 0,76 - infracrveno - 20 μ.

Maksimalni intenzitet zračenja Sunca, koje ima na svojoj površini temperaturu 5600° aps. i koje zrači kao potpuno crno telo, pripada zracima talasne dužine 0,5 μ, dakle spektralnom području zelene boje.

Potpuno crno telo emituje zrake od najmanjih do največih talasnih dužina ($0 < \lambda < \infty$). Kao što vidimo iz slike 32 intenzitet zračenja se menja sa talasnom dužinom i nagib krive, koja nam pokazuje ovaj intenzitet kao funkciju talasne dužine, počinje u blizini vrednosti λT = 1000 μ grad vrlo brzo da se povećava. Ako bismo uzeli u obzir samo zračenje iznad talasnih dužina λ = 1000:T, dobili bismo za 0,1% manju količinu zračenja od one koju nam daje ukupno zračenje potpuno crnog tela temperature T.

Na desnoj strani maksimuma, osmatrana kriva ima drukčiji izgled. Tamo se intenzitet zračenja sa talasnom dužinom sporije smanjuje nego što je se na levoj strani od maksimuma povećavao. Ako ne bismo uzeli u obzir zračenje talasnog područja većeg od λ = 24000:T, onda bismo dobili za 1% manju količinu zračenja od ukupne. Ako bi pak zanemarili količinu zračenja iznad λ = 54000:T dobili bismo praktično ukupnu količinu zračenja potpuno crnog tela temperature T.

Kod zračenja potpuno crnog tela temperature T = 6000° aps. (temperatura površine Sunca) najveći deo energije zračenja otpada na spektralno područje $0{,}17\mu < \lambda < 4\mu$. Za T = 300 i 200° su odgova-

rajući intervali $[3\mu, 80\mu]$ odn. $[4\mu, 120\mu]$. Vidimo da je zračenje zemljinog tla i vazduha u atmosferi iz oblasti infracrvenog dela spektra, to je dugotalasno ili tamno toplotno zračenje. Uglavnom u vidljivi deo spektra spadaju kratkotalasni zraci. Ovi vidljivi zraci koji dolaze od Sunca nose sobom otprilike pola energije sunčevog zračenja.

6. Stefan-ov zakon. Josip Stefan je 1878 god. otkrio zakon da je ukupno zračenje potpuno crnog tela srazmerno četvrtoj potenciji njegove apsolutne temperature. Prema tome potpuno crno telo temperature T emituje u svakoj jedinici vremena kroz jedinicu svoje površine (u prostorni ugao 2π)

$$E = \sigma T^4 \qquad [\sigma] = [erg\ cm^{-2} sec^{-1} grad^{-4}] \tag{12}$$

gde se srazmernosni faktor σ zove konstanta zračenja. Vrednost ove univerzalne konstante je

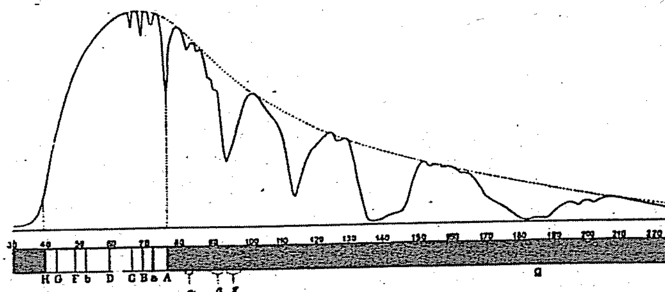
$$\begin{aligned}\sigma &= 5,77 \cdot 10^{-5}\ erg\ cm^{-2}\ sec^{-1} grad^{-4}\\ &= 1,378 \cdot 10^{-12}\ cal\ cm^{-2}\ sec^{-1}\ grad^{-4}\\ &= 4,9 \cdot 100^{-4}\ kcal\ m^{-2}\ čas^{-1}\ grad^{-4}\end{aligned} \tag{13}$$

Stefanov zakon je prvi teorijski dokazao Boltzmann a integralenjem dobija se odmah iz Planckove formule (7).

Svaki kvadratni metar potpuno crnog tela temperature T = 6000, 300 i 200° aps. emituje svakog časa $6 \cdot 10^7$, 394 odn. 78 kcal.

2. Spektralna raspodela sunčevog zračenja na zemljinoj površini

Prilikom prelaženja kroz sunčevu i zemljinu atmosferu intenzitet zračenja više ili manje slabi. Slabi delom zbog apsorpcije a delom zbog refleksije. Slabljenje nije u svim spektralnim oblastima jednako, kao što je to prvi pokazao S.P.Langley (1884). Rezultati tih njegovih merenja grafički su prikazani na sl. 33 koja



Sl. 33
Raspodela energije u spektru Sunca prema Langley-u

nam daje raspodelu sunčevog zračenja na zemljinoj površini kao funkciju talasne dužine.

Rezultati Langley-evih merenja pokazuju nam prilično velika otstupanja od raspodele energije koja odgovara zračenju potpuno crnog tela (isprekidana linija na sl. 33). Ova otstupanja posledica su slabljenja intenziteta sunčevog zračenja prilikom prelaza sunčevog zračenja na putu kroz sunčevu i uglavnom zemljinu atmosferu. Slabljenje zračenja u zemljinoj atmosferi u najvećoj meri je posledica selektivne apsorpcije (različita apsorpcija u različitim oblastima spektra). Do nje dolazi prvenstveno zbog prisustva ozona (O_3), kiseonika (O_2), vode (H_2O) u gasovitom i tečnom stanju i zbog ugljendioksida(CO_2). Dalje je ovo slabljenje još posledica neselektivne apsorpcije na česticama uglja, prašine itd i rasipanja, tj. difuzne refleksije na molekulima atmosferskih gasova i na spomenutim česticama suspendovanim u vazduhu.

Zbog apsorpcije u sunčevoj atmosferi, koju sačinjavaju atomi, a delom i zbog apsorpcije u visokim slojevima atmosfere Zemlje, u spektru postoje poznate Fraunhofer-ove crte apsorpcije - vrlo oštro ograničene tanke tamne crte. Za razliku od toga, selektivne apsorpcije u zemljinoj atmosferi, koju prvenstveno sačinjavaju molekuli, u sunčevom spektru postoje trake apsorpcije, koje nisu oštro ograničene (sl. 33). Na slici vidimo da se veći deo traka apsorpcije nalazi u infracrvenom delu spektra kao i na kraju crvenog dela spektra. Karakteristična je i apsorpcija pri 0,3μ, tj. u ultraljubičastom delu spektra, gde je spektar oštro prekinut. Već 1913. godine Wigand je fotografisao sunčev spektar na visini 9 km i našao da je bio spektar i na ovoj visini oštro prekinut pri 0,3μ. Tek 1921 god. su Fabry i Buisson pokazali da je ova apsorpcija prouzrokovana - što je pretpostavljao i Wigand - ozonom, koji se u većim količinama nalazi u višim slojevima atmosfere. Ozon apsorbuje u manjoj meri i zrake talasnih dužina od 9 do 10μ, koji padaju svakako daleko izvan domena najintenzivnijeg sunčevog zračenja.

Ozon u atmosferi je od značaja i za dinamičku meteorologiju. Već Dobson, Duckert i Meetham su utvrdili naime da postoji uska korelacija između sadržine ozona u atmosferi, koji se rasprostire prvenstveno na visinama između 10 i 40 km (ovo su potvrdila i najnovija direktna merenja pomoću raketa u New Mexico - lit. str.74) i gustine vazduha u stratosferi.

U oblasti spektra koja se odnosi na najintenzivnije sunčevo zračenje postoje uglavnom dve linije apsorpcije kiseonika (pri 0,69μ i 0,76μ) i trake apsorpcije vodene pare sa težištem pri 0,72, 1,13, 1,37 i 1,85μ, dalje između 1,91 i 2,03 i pri 2,66μ. U ovoj oblasti postoje još uske trake apsorpcije CO_2 i to između λ= 2,3 i 3,0μ.

Spektar apsorpcije vodene pare bio je predmet istraživanja mnogo istraživača (Hettner, Weber, Randall i dr.) koji su određivali i moć apsorpcije vodene pare za pojedine talasne dužine. Tako je napr. G.C. Simpson pokazao (1928) da sloj vazduha koji sadrži iznad svakog kvadratnog metra donje baze 0,3 kg vodene pare (što bi dalo 0,3 mm padavina) potpuno apsorbuje sve zrake talasnih dužina između 5,5 i 7μ i većih od 14μ. Nepotpuno biva od ovakvog sloja vazduha apsorbovano zračenje talasnih dužina 7 do 8,5μ i 11 do 14μ, a potpuno providan je ovakav sloj skoro za čitave spek-

tralne oblasti od 8,5 do 11μ i ispod 4μ. Apsorpcioni spektar ugljen dioksida ima jednu traku apsorpcije u okolini 4μ, vrlo intenzivnu pri 14,7μ i jednu prostranu koja se prostire od 12 do 16,3μ.

3. Beer-ov zakon i solarna konstanta

Glavni i praktično jedini izvor energije koja je od značaja za dinamiku atmosfere je Sunce. Od osnovne je važnosti zbog toga poznavanje intenziteta sunčevog zračenja na vrhu atmosfere gde ono zbog apsorpcije i rasipanja još nije oslabljeno.

Na putu ds kroz atmosferu, intenzitet zračenja I koji se odnosi na paralelne zrake spektralne oblasti $\lambda \pm \frac{1}{2}d\lambda$ smanji se prema Lambert-u i Bouguer-u za

(1) $$-dI_\lambda = k_\lambda I_\lambda \rho ds \qquad [k_\lambda] = [kg^{-1} m^2]$$

Srazmernostni faktor k_λ zove se koeficijent ekstinkcije (slabljenja). Ako pretpostavimo da se k_λ na putu s ne menja, onda se u saglasnosti sa jedn. (1) na tom putu početni intenzitet $I_{\lambda o}$ smanji na

(2) $$I_\lambda = I_{\lambda o} e^{-k_\lambda m}$$

gde je

(3) $$m = \int_0^s \rho ds$$

masa u stubu dužine s preseka jedan. Jedn. (2) možemo pisati i u obliku

(4) $$I_\lambda = I_{\lambda o} 10^{-k'_\lambda m}$$

ili

(5) $$I_\lambda = I_{\lambda o} q_\lambda^m$$

gde je

(6) $$k'_\lambda = 0{,}4343\, k_\lambda \qquad i \qquad q_\lambda = 10^{-k'_\lambda} = e^{-k_\lambda}$$

Obrasci (2) i (4) zovu se Bouguer-Lambert-ove formule, a obrazac (5) nosi naziv Bouguer-ova formula. Koeficijent k'_λ zove se dekadni koeficijent ekstinkcije a q_λ je koeficijent (faktor) transmisije (propuštanja). Jednačina (2) odn. (4) ili (5) izražava Beer-ov zakon.

Često možemo pretpostaviti da se veličine koje se u gornjim jednačinama pojavljuju mogu da menjaju samo u vertikalnom pravcu. U tom slučaju možemo mesto jedn. (3) pisati

(7) $$m = m_o \sec\alpha$$

gde je α ugao između zrake i vertikale, a

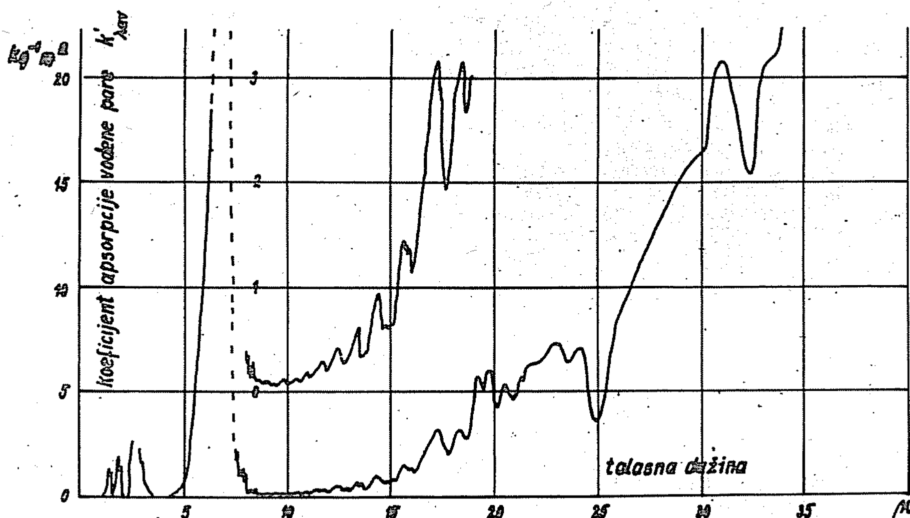
(8) $$m_o = \int_{z_1}^{z_2} \rho\, dz$$

tzv. optička dubina ili optička debljina sloja koji leži između visina z_1 i z_2.

Koeficijent rasipanja sastoji se iz dva dela, iz koeficijenta apsorpcije $k_{\lambda a}$ i koeficijenta rasipanja $k_{\lambda r}$:

(9) $$k_\lambda = k_{\lambda a} + k_{\lambda r}$$

Koeficijent apsorpcije jednak je zbiru koeficijenata apsorpcije pojedinih sastojaka vazduha. Od posebnog značaja je poznavanje koeficijenta apsorpcije vodene pare. Određivali su ga mnogi istraživači. Koliko iznosi prikazuje nam slika 34 iz koje razaberemo da se taj koeficijent sa talasnom dužinom stalno menja. Pri talasnoj dužini $\lambda_2 = 19{,}5\mu$ je npr. koeficijent apsorpcije vodene pare $k'_{\lambda av} = 5\ kg^{-1}m^2$ (sl. 34). Ako bi sloj vazduha sadržao toliko vodene pare da bi kondenzovana dala 1 mm = 1 kg/m^2 padavina, onda bi u saglasnosti sa jedn. (4) intenzitet takvih zrakova, prilikom prolaženja najkraćim putem kroz taj sloj, bio 10^5 puta smanjen.



Sl. 34. Apsorpcioni spektar vodene pare po Hettneru (1918)

Koeficijent rasipanja sastoji se iz dva dela, iz <u>molekulskog koeficijenta rasipanja</u> $k_{\lambda r1}$ i <u>koeficijenta rasipanja za suvu mutnoću</u> $k_{\lambda r2}$:

(10) $$k_{\lambda r} = k_{\lambda r1} + k_{\lambda r2}$$

Molekulski keoficijent rasipanja je prema Lordu Rayleigh-u (1871)

(11) $$k_{\lambda r1} = \frac{32\pi^3}{3N\lambda^4}(n-1)^2 = 331\lambda^{-4}(n-1)^2 N^{-1}$$

(N = broj molekula u kubnom santimetru vazduha - pri 760 mm Hg i 0^oC je $N = 2{,}7\cdot10^{19}$, n = koeficijent prelamanja za vazduh = 1,000294 za $\lambda = 0{,}50\mu$ i $\rho_2 = 1{,}293\ kg\ m^{-3}$). Za veće čestice važi sličan zakon (mesto λ^4 je tamo λ^2).

Rayleigh-ova teorija tumači plavetnilo neba, pojavu jutarnjeg i večernjeg crvenila i sumrak. Na najsitnijim česticama koje

su suspendovane u vazduhu, a naročito na molekulama vazduha, bivaju od svetlosnih zraka najjače rasipani zraci ljubičaste i plave boje, pošto imaju najmanju talasnu dužinu (jedn. (11)). Oni zbog toga često menjaju svoj pravac prostiranja, tako da sa svih strana dolaze u naše oko. Jutarnje i večernje crvenilo u najvećoj je meri posledica rasipanja na najvećim česticama koje se nalaze u vazduhu i toga da tada sunčevi zraci prevaljuju mnogo veći put kroz atmosferu nego u drugo doba dana.

Na osnovu merenja intenziteta sunčevog zračenja pri raznim visinama Sunca može se uz pomoć Bouguer-Lambert-ove ili Bouguer-ove formule izračunati intenzitet sunčevog zračenja na vrhu atmosfere sa većom ili manjom tačnošću. Za ovakva merenja naročito su podesne stanice koje se nalaze visoko u brdima gde je klima suva i preovlađuje vedro vrme. Na osnovu merenja intenziteta zračenja pri raznim visinama Sunca brojnih spektralnih oblasti mogu se dobiti dobri rezultati. Tu metodiku prvi je kritički obradio Langley (1884).

Intenzitet sunčevog zračenja na srednjem otstojanju Zemlje od Sunca na vrhu atmosfere zove se solarna konstanta. Svakako ta vrednost ustvari nije nikakva konstanta već se u toku vremena menja. Te promene su vrlo male i jedva se mogu naslutiti. Kada se uzmu u obzir i nova merenja pomoću raketa u New Mexico, onda možemo danas smatrati da je solarna konstanta

$$I_o = 2{,}00 \pm 0{,}04 \text{ cal cm}^{-2}\text{min}^{-1} \qquad (12)$$

Intenzitet sunčevog zračenja na vrhu atmosfere se u toku vremena zbog revolucije Zemlje periodično menja. Kada je Zemlja u perihelu, taj intenzitet je za 7 otsto veći nego tada kada je Zemlja u afelu. U toku jedne godine dolazi od Sunca na Zemlju toliko energije da bi ova bila u stanju da istopi 35 m debeo sloj leda koji bi obavijao celu Zemlju. Ako uzmemo u obzir da 42% od ove energije biva reflektovano (0,42 = albedo Zemlje), onda vidimo da bi samo iskorišćeni deo sunčeve energije u toku jedne godine mogao da istopi takav sloj leda debeo 20 m. U svrhu upoređenja navodimo da bi toplotna struja iz užarenog zemljinog jezgra mogla u toku godine istopiti svega 7,5 mm debeo sloj leda. Debljina takvog sloja leda koga bi jednovremeno istopio Mesec bila bi svega 0,2 mm, pa i ako bi Mesec bio čitavo vreme pun. Zračenje Zvezda dovodi Zemlji 10^8 puta manje energije nego Sunce. Istog reda veličine je i dovođenje toplote putem kozmičkog zračenja.

4. Schwarzschild-ove jednačine zračenja

U atmosferi se prostiru u svim mogućim pravcima bezbrojni elektromagnetski talasi najrazličitijih talasnih dužina i raznog porekla čijih glavni izvor je Sunce.

Intenzitet sunčevog zračenja prilikom prolaza kroz atmosferu više ili manje slabi. Ovo slabljenje je posledica:

1. apsorpcije (pretvaranja toplotne energije elektromagnetskog zračenja u unutrašnju energiju vazduha) i
2. difuzne refleksije na molekulima vazduha i na tečnim i čvrstim suspendovanim česticama u vazduhu (pri tome se unutrašnja energija vazduha ne menja).

Veliki deo sunčeve energije apsorbuje zemljino tle koje prema Kirchhoff-ljevom zakonu i neprestano zrači toplotnu energiju uglavnom u vidu dugotalasnog toplotnog zračenja. Slično kao intenzitet sunčevog zračenja, tako i intenzitet dugotalasnog tamnog zračenja zemljinog tla na putu kroz atmosferu slabi. Najvećim delom slabi zbog apsorpcije, tj. zbog pretvaranja zračne energije u unutrašnju.

Prema Kirchhoff-ljevom zakonu i vazdušne mase u atmosferi neprestano zrače toplotnu energiju, i to u vidu dugotalasnog elektromagnetskog zračenja koje se prostire delom naviše delom naniže.

Vidimo da se u atmosferi kroz svaku horizontalnu površinu stalno vrši prenos energije elektromagnetskog zračenja: naviše i naniže. Kroz svaku jedinicu horizontalne površine prolazi u svakoj jedinici vremena sa donje na gornju stranu struja zračenja

$$O = \int_0^\infty O_\lambda d\lambda \tag{1}$$

koju sačinjava dugotalasno zračenje zemljine podloge, dugotalasno sopstveno zračenje vazdušnih slojeva koji leže ispod te površine i difuzno zračenje neba. Jednovremeno kroz istu površinu struji od gore nadole energija elektromagnetskog zračenja

$$D = \int_0^\infty D_\lambda d\lambda \tag{2}$$

koju sačinjava energija sunčevog zračenja, dugotalasnog sopstvenog zračenja više ležećih vazdušnih slojeva (atmosfersko kontra - zračenje) i difuzno zračenje neba.

Jedna i druga struja zračenja prilikom prolaza kroz atmosferu menja svoj intenzitet. Prvo posmatrajmo kako dolazi do menjanja intenziteta nagore usmerene struje (1).

Zraci prenose energiju od dole nagore u svim mogućim pravcima. Zbog toga prilikom proučavanja slabljenja takvog zračenja ne možemo jednostavno primeniti Beer-ov zakon koji se odnosi na slabljenje intenziteta paralelnih zrakova.

U slučaju da zraci u vidu difuznog zračenja dolaze sa svih strana je moć apsorpcije svakog sloja atmosfere veća nego u slučaju kad bi zraci bili usmereni vertikalno nagore. To je razumljivo kad uzmemo u obzir da kod difuznog zračenja zraci prilikom prostiranja nagore provale veći put nego kod paralelnog vertikalnog zračenja.

Emden je pokazao (1913) da je moć apsorpcije svakog sloja u izotermnoj atmosferi sa beskonačnom masom za difuzno zračenje potpuno crnog tela dva puta veća od moći apsorpcije koja se odnosi na paralelno zračenje potpuno crnog tela. I za druge vrste atmosfere je kod difuznog zračenja moć apsorpcije više ili manje povećana. Tako je napr. Roberts pokazao (1930) da je za difuzno zračenje sa zemljinog tla moć apsorpcije atmosfere 1,5 puta veća od normalne i da i za ovakvo zračenje približno važi jednostavan zakon za slabljenje zračenja.

Neka deo naviše usmerene struje zračenja spektralne oblasti $\lambda \pm d\lambda$ pri prolazu kroz elemenat mase ϱdz oslabi za $k_\lambda O_\lambda \varrho dz$

(k_λ = koeficijenat ekstinkcije za dugotalasno difuzno zračenje spektralne oblasti λ). U saglasnosti sa Kirchhoff-ljevim zakonom, vazduh posmatrane mase ϱdz emituje naviše $a_{\lambda T}E_{\lambda T}$ energije (1(6)), tako da se prilikom promene visine za dz struja O_λ promeni ukupno za

(1) $$dO_\lambda = - k_\lambda O_\lambda dz + a_{\lambda T} E_{T\lambda}$$

Očigledno je u našem slučaju moć apsorpcije

(2) $$a_{\lambda T} = k_\lambda \varrho dz$$

Kad uzmemo ovo u jedn. (1) u obzir, dobijamo za promenu intenziteta odlazne struje zračenja O_λ prilikom prolaženja kroz jedinicu mase vazduha

(3^a) $$\frac{dO_\lambda}{dm} = - k_\lambda O_\lambda + k_\lambda E_{\lambda T}$$

Slično dobijamo za ukupnu promenu vertikalne struje zračenja nadole D_λ (dolazno zračenje spektralne oblasti λ) na istom putu

(3^b) $$\frac{dD_\lambda}{dm} = + k_\lambda D_\lambda + k_\lambda E_{\lambda T}$$

Jednačine (3) zovu se Schwarzschild-ove jednačine zračenja (1906).

Zamislimo da na temperaturu vazduha može da utiče samo zračenje. Ako se u specijalnom slučaju pri tome temperatura ne menja, kažemo da je tada onaj vazduh u ravnoteži zračenja. Očigledno je sloj vazduha u ravnoteži zračenja kada na obe strane emituje tačno toliko energije koliko jednovremeno apsorbuje zračenja koje dolazi od dole i od gore. U slučaju ravnoteže zračenja važi prema tome

(4) $$2\int_0^\infty k_\lambda E_{\lambda T}\, d\lambda = \int_0^\infty k_\lambda (D_\lambda + O_\lambda) d\lambda$$

Ako oduzmemo jedn. (3^a) od jedn. (3^b) i dobivenu jednačinu množimo sa $d\lambda$ i posle integralimo od 0 do ∞, dobijamo vrednost koja nam u poređenju sa dobivenom jed. (4) kaže da je u slučaju ravnoteže zračenja razlika između ukupnog dolaznog i odlaznog zračenja od mase nezavisna:

(5) $$\frac{d}{dm}(D - O) = 0$$

5. Sopstveno zračenje atmosfere zbog vodene pare

Važno je pitanje u kolikoj meri utiće apsorpcija zračenja zbog prisustva vodene pare na temperaturu vazduha. U tom pogledu je D. Brunt (1929) došao do jednačina pomoću kojih možemo taj uticaj proceniti.

Maksimalni intenzitet zračenja sa zemljine površine pripada spektralnoj oblasti oko 10μ, a iz stratosfere spektralnoj oblasti oko $12{,}5\mu$. Vodena para je za zračenje talasnih dužina 8,5 do 11μ praktično providna, što znači da baš zrake maksimalnog intenziteta

propušta (str. 116). Videli smo (str. 115) da sloj vazduha, koji sadrži toliko vodene pare da bi ova dala, kad bi se kondenzovala, 0,3 mm = 0,3 kg m^{-2} padavina, nimalo ne propušta zračenje talasnih dužina 5,5 do 7μ i većih od 14μ.

Debljinu sloja koji bi dao 0,3 mm padavina možemo odmah odrediti:

Prema jednačini stanja vodene pare je

(1) $$e = 1{,}608 R_s \varrho_v T = 1{,}608 R_s \frac{0{,}3}{\Delta z} T$$

(Δz = debljina sloja). Odavde dobijamo, ako pritisak vodene pare e izrazimo u mb

(2) $$\Delta z = \frac{0{,}3 \cdot 1{,}608 \cdot 2{,}87 T}{e} = \frac{1{,}38 T}{e} \text{ metara} = \frac{138 T}{e} \text{ cm}$$

U najniže ležećim slojevima e je reda veličine 10 mb, a Δz je oko 40 m. Pošto se e sa visinom prilično brzo smanjuje (str. 67), to se debljina Δz sa visinom dosta brzo povećava. Ako sada prema Brunt-u atmosferu podelimo u same takve Δz-slojeve, onda možemo u pogledu zračenja talasnih dužina $5{,}5\mu < \lambda < 7\mu$ i $14\mu < \lambda$, tj. u pogledu W-zračenja, kao što ga naziva Brunt, da zaključujemo sledeće:

Jedan od takvih Δz-slojeva, napr. n-ti kad brojimo od dole, emituje naviše (kao potpuno crno telo) sa jedinice površine u jedinici vremena E_n W-zračenja. Jednovremeno emituje susedni n + 1 sloj kroz istu jedinicu površine E_{n+1} energije W-zračenja nadole. Kroz jedinicu granične površine oba sloja struji dakle naviše struja zračenja

(3) $$F_n = E_n - E_{n+1}$$

Ako je T_n srednja temperatura sloja n i T_{n+1} srednja temperatura sloja n + 1, onda je

(4) $$E_n - E_{n+1} = -\Delta E_n = -\frac{\Delta E}{\Delta T}(T_{n+1} - T_n)$$

ili približno, kad uzmemo u obzir jedn. (3) i (2)

(5) $$F_n = -\frac{\partial E}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}\Delta z = -j\frac{\partial T}{\partial z} \qquad (\frac{\partial T}{\partial z} \text{ u grad cm}^{-1})$$

gde je

(6) $$j = \frac{138 T}{e}\frac{\partial E}{\partial T}$$

Na gore usmerena struja W-zračenja srazmerna je prema tome vertikalnom temperaturnom gradijentu i veličini-koeficijentu j.

U koeficijentu j javlja se veličina $\frac{\partial E}{\partial T}$, tj. promena intenziteta W-zračenja sa temperaturom. Ovu vrednost možemo dobiti pomoću Planck-ove formule odn. izračunatih tablica. Prema Simpsonu je

temp. =	200	220	270	295°	aps.
$\frac{\partial E}{\partial T} \cdot 10^3$ =	1,6	2,0	3,0	3,5	cal/cm^{2}min grad

Kad uzmemo ove vrednosti u obzir, vidimo da možemo za navedeni interval temperature pisati

(7) $$\frac{\partial E}{\partial T}\cdot 10^3 = 3,0 + 0,02(T - 270) \text{ cal/cm}^2 \text{ min grad}$$

Unošenjem ove vrednosti u jedn. (6) dobijamo napr. za T = 290° aps., e = 10 mb i $\gamma = 0,6°C/100$ m$=0,6\cdot 10^{-4}$ grad cm^{-1} (to su približno srednje vrednosti) nagore usmerenu struju W-zračenja jačine

$$F_n = 8\cdot 10^{-4} \text{ cal cm}^{-2}\text{min}^{-1}$$

Struja W-zračenja se obično sa visinom, zbog srazmerno brzog smanjivanja pritiska vodene pare e, srazmerno brzo povećava. Tako je procenio Brunt pomoću napisane formule (5) da su u julu iznad Britanskih ostrva neke vrednosti na gore usmerenog W-zračenja sledeće

visina tle	2	4	6	9	10 km
F_n = 7,5	11,5	29	85	384	$1170\cdot 10^{-4}$ cal $cm^{-2}min^{-1}$

Pošto nisu stajali na raspoloženju podaci o pritisku vodene pare na visini, Brunt je taj pritisak određivao pod pretpostavkom da je na svim visinama relativna vlažnost bila 60 %.

U svrhu upoređenja dobivenih vrednosti novodimo ovde koliko energije prosečno Sunce dovodi svakom kvadratnom santimetru horizontalne podloge zemljinog tla. Ako uzmemo u obzir da je albedo Zemlje 0,42 (str. 118) i da je površina Zemlje četiri puta veća od njenog preseka kroz centar, dobijamo da ova energija iznosi

$$0,29 \text{ cal cm}^{-2}\text{min}^{-1}$$

Ona je svega 2,4 puta veća od gore navedene vrednosti za visinu 10 km.

Od visine z do visine z + dz jačina struje F_n promeni se za

(8) $$\frac{\partial F_n}{\partial z} dz = -\frac{\partial}{\partial z}\left(j\frac{\partial T}{\partial z}\right) dz$$

Kad ne bi bilo drugog dovođenja i odvođenja toplote, onda bi ova promena jačine W-struje pri konstantnom pritisku imala za posledicu u vazduhu, u kome je došlo do ove promene, promenu enthalpije za $60\varrho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dz$ (ϱ = gustina vazduha u g cm^{-3}, $\frac{\partial T}{\partial t}$ = promena temperature u jednom sekundu). Ako uzmemo u obzir da je vrednost (8) množena sa -1 (pojačavanje struje znači smanjivanje temperature) jednaka ovoj promeni enthalpije, onda dobijamo za promenu temperature zbog W-zračenja u toku vremena (u jednom sekundu)

(9) $$60\varrho c_p\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(j\frac{\partial T}{\partial z}\right) = -\frac{\partial F_n}{\partial z}$$

Zbog jačanja struje zračenja sa visinom navedenog u gornjoj tablici bi samo zbog ovog efekta u prizemnom 2 km debelom sloju vazduha i na visini između 9 i 10 km u toku od 24 časa došlo do smanjenja temperature za 0,0012 odn. 1,5°C.

Kada se j sa visinom ne menja, mesto jedn. (9) možemo pisati

(10) $$\frac{\partial T}{\partial t} = k_R\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

gde je

(11) $$k_R = \frac{j}{60\varrho c_p} = \frac{138T}{60\varrho c_p e}\frac{\partial E}{\partial T}$$

Za T = 280° aps., e = 5 mb, $\varrho = 1,25\cdot10^{-3}$ g cm^{-3} dobijamo

(12) $$k_R = 1,3\cdot10^{3}\ \mathrm{cm}^2\ \mathrm{sec}^{-1}$$

Dobivena jednačina (10) je po obliku jednaka jednačini III 11 (5) za pojave toplotne provodljivosti za specijalni slučaj da se temperatura u pravcima x i y ne menja. U istim jedinicama je koeficijenat temperaturske provodljivosti vazduha (0°C, 1,3 kg m^{-3}) samo 0,16 (str. 66), dakle neuporedivo manji, što znači da W-zračenje u jednako većoj meri utiče na temperaturu vazduha od toplotne provodljivosti.

Na kraju možemo još proceniti koliki je uticaj W-zračenja na temperaturu vazduha na mestima gde se vertikalni temperaturni gradijent sa visinom menja.

Kad bi se vertikalni temperaturni gradijent prilikom promene visine za 100 m = 10^4 cm promenio za ±1°C/100 m = 10^{-4} grad cm^{-1}, što je napr. često slučaj u oblasti temperaturskih inverzija, onda bi u saglasnosti sa jedn. (10) i (12) bilo

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mp 1,3\cdot10^{3}\cdot10^{-8}\cdot24\cdot3600^{\circ}C = 1,1^{\circ}C \text{ na dan.}$$

6. Dugotalasno zračenje Zemljine podloge i temperatura tla

Od velikog značaja za tumačenje dnevnog hoda temperature u donjim slojevima atmosfere i gornjem sloju zemljinog tla je poznavanje intenziteta efektivnog izračivanja zemljinog tla. Pod ovim izračivanjem (radijacijom) podrazumeva se razlika između izračivanja zemljine površine kao potpuno crnog tela i kontrazračenja D, dakle

(1) $$R = \sigma T^4 - D$$

(T = temperatura zemljinog tla). Efektivno izračivanje R kreće se uglavnom u granicama između 0,12 i 0,24 cal cm^{-2}min^{-1}, te je od oorografskih prilika praktično nezavisno. Na osnovu obrade velikog broja podataka A. Angström je našao za vedre dane

(2) $$R = R_o = \sigma T^4\,(0,194 + 0,236\cdot10^{-0,069\,e})$$

(e = pritisak vodene pare u mm Hg). Koliko je σT^4 za neke temperature daje nam tablica

T	=	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320° aps.
σT^4	=	0,161	193	231	274	323	378	439	508	584	669	762	866 $\frac{cal}{cm^2 min}$

Za oblačne dane u Upsali A. Angström je našao sledeću empirisku formulu

(3) $$R = (1 - km)R_o$$

gde je m količina oblačnosti (0 = vedro, 10 potpuno oblačno) a R_o vrednost (2). Faktor k zavisi od gustine, debljine i temperature oblačnog sloja. Pri niskoj oblačnosti je k = 0,08.

Kad zemljino tle ne zrači kao potpuno crno telo, treba uzeti

u obzir još moć apsorpcije a zemljinog tla. Za zračenje talasnog područja $\lambda > 10\mu$ imamo po G. Falckenbergu sledeće vrednosti

Sastav tla	sneg	lišće, trava	svetao pesak
Moć apsorpcije a	0,995	0,96-0,98	0,89

Zbog izračivanja (radijacije) i obasjavanja Sunca (insolacije) temperatura zemljinog tla u toku dana se menja. Zbog toplotne provodljivosti prenosi se toplota i u niže slojeve tla. Što brže se toplota prenosi u dubinu, to manje su temperaturske promene na samoj površini tla i to manje se u toku vremena menja efektivno dugotalasno izračivanje zemljinog tla.

Temperaturu površine tla možemo sebi dosta dobro pretstaviti sledećom funkcijom:

(4) $$T = T_o = T_s + A_o \cos \nu t$$

gde su

A_o = amplituda,
ν = kružna frekvencija talasanja
t = vreme
T_s = srednja temperatura za vreme jednog talasnog perioda (perioda talasanja) koji je očigledno

(5) $$t_1 = \frac{2\pi}{\nu}$$

Ako je napr. t_1 = 24 časova, onda je kružna frekvencija $\nu = 2\pi:24$.

Na temperaturu T_o utiče pored zračenja i temperaturske provodljivosti još turbulencija vazduha, zbog koje se za vreme najjače insolacije deo toplote zagrejanog tla prenosi u više slojeve atmosfere. Kao što ćemo videti kasnije, u toku vedrih dana uticaj turbulencije na temperaturu tla i prizemnog vazduha vrlo je veliki. Ovde nas interesuje samo kako provođenje toplote u čvrstom tlu utiče na temperaturu gornjih slojeva zemljinog tla.

Ako pretpostavimo da se temperatura u zemljištu u horizontalnom pravcu ne menja, onda se tamo temperatura u svakoj tačci menja u saglasnosti sa sledećom jednačinom (str. 66):

(6) $$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

koju možemo zbog jednostavnog graničnog uslova (4) jednostavno integraliti.

Svakako očekujemo da se potpuno slično talasanje temperature kao na zemljinoj površini javlja i u svim dubinama gornjeg prizemmog sloja zemlje a da se amplituda ovog talasanja sa dubinom smanjuje i to eksponencijalno. Dalje možemo očekivati i neko pomeranje faze ovog talasanja sa dubinom. Očekujemo prema tome da je na dubini z u trenutku vremena t temperatura

(7) $$T = T_s + A_o e^{-pz} \cos(\nu t - \varepsilon)$$

tj. ona vrednost koja zadovoljava uslov (6) a koja nam za z = 0 daje i granični uslov (4). U postavljenoj jednačini su p i ε

vrednosti koje treba odrediti. Veličina ε zove se <u>fazni ugao</u> ili kratko <u>faza</u>.

Pretpostavimo da je p konstantno a ε neka funkcija dubine z (z sa dubinom raste):

$$p = \text{const.} \quad \text{i} \quad \varepsilon = \varepsilon(z) \tag{8}$$

Ako zbog skraćenosti pišemo

$$u = \nu t + \varepsilon \tag{9}$$

dobijamo pod ovim uslovima iz jedn. (7)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - A_o \nu e^{-pz} \sin u \tag{10}$$

i

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = A_o e^{-pz} \left[p^2 \cos u - 2p \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \sin u - \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)^2 \cos u + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} \sin u \right] \tag{11}$$

Unošenjem dobivenih vrednosti u jedn. (6) dobijamo posle skraćivanja sa $A_o e^{-pz}$ jednačinu

$$- \nu \sin u = k \left[p^2 \cos u - 2p \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \sin u - \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)^2 \cos u + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} \sin u \right]$$

koja može da bude za svako t ispunjena očigledno samo tada kada je

$$\frac{\nu}{k} = 2p \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} \tag{12}$$

i

$$p^2 - \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)^2 = 0 \quad \text{odn.} \quad p = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \tag{13}$$

Kad uzmemo u obzir da je prema jedn. (8) p = const, a prema jedn. (4) $\varepsilon = 0$ za $z = 0$, to vidimo da je u saglasnosti sa jedn. (13) fazni ugao ε linearna funkcija dubine:

$$\varepsilon = pz \tag{14}$$

U saglasnosti sa jedn. (13) može p da bude i pozitivno i negativno. Pošto ovde zamišljamo da u dubini nema izvora (ili ponora) toplote, to se amplituda

$$A = A_o e^{-pz} \tag{15}$$

sa dubinom smanjuje, a što je moguće samo pod uslovom da je

$$p > 0 \tag{16}$$

Koliko je p dobijamo iz jedn. (12) kad uzmemo u obzir jedn. (14) i (8). Na taj način dobijamo

$$p = \sqrt[+]{\frac{\nu}{2k}} = \sqrt[+]{\frac{\pi}{t_1 k}} \tag{17}$$

Jednačinama (17) i (14) određene su tražene vrednosti ε i p a njima funkcija (7), tj. temperatura na dubini z u vremenu t:

(18) $$T = T_s + A_o e^{-z\sqrt{\frac{\nu}{2k}}} \cos\left(\nu t - z\sqrt{\frac{\nu}{2k}}\right)$$

Dobiveni rezultat možemo jednostavno tumačiti.

Prvo vidimo da faza sa dubinom zaostaje, što znači da se svaka promena temperature na površini, svakako smanjena, (15), sa izvesnim zakašnjenjem prenosi u dubinu.

U intervalu vremena $(t - \frac{dt}{2}, t + \frac{dt}{2})$ na površini tla temperatura se promeni za

$$dT_o = - A_o\nu \sin \nu t \cdot dt$$

Ova promena ima u intervalu vremena $(t' - \frac{dt}{2}, t' + \frac{dt}{2})$ za posledicu da se na dubini z temperatura promeni za

$$dT = - A\nu \sin\left(\nu t' - z\sqrt{\frac{\nu}{2k}}\right) \cdot dt$$

pri čemu je

$$\sin \nu t = \sin\left(\nu t' - z\sqrt{\frac{\nu}{2k}}\right) \quad \text{ili} \quad \nu t = \nu t' - z\sqrt{\frac{\nu}{2k}}$$

Iz dobivene jednačine vidimo da do odgovarajuće promene temperature dođe na dubini z posle vremena

$$t' - t = z\sqrt{\frac{1}{2k\nu}}$$

što znači da se poremećaj temperature prenosi u dubinu brzinom

(19) $$c = \sqrt{2k\nu} = 2\sqrt{\frac{\pi k}{t_1}}$$

koja od amplitude ništa ne zavisi.

Svaka promena temperature na zemljinom tlu prenosi se u dubinu konstantnom brzinom (19) a pri tome se sa dubinom eksponencijalno smanjuje. U dubinu se prenosi talasanje temperature i dužina jednog takvog vertikalnog vala (koji se pojavi u periodu t_1) je

(20) $$\ell = ct_1 = 2\sqrt{\pi t_1 k}$$

I brzina prostiranja c i dužina ℓ vertikalnog vala zavisi od temperaturske provodljivosti i perioda t_1. Godišnje talasanje se prostire sa talasom veće talasne dužine nego što se u dubinu prostire dnevno talasanje. Jedna i druga talasna dužina su očigledno u odnosu $\sqrt{\frac{365}{1}} = 19$.

U saglasnosti sa jedn. (15) je na dubini $z = \frac{\ell}{2}$ i ℓ amplituda

(21) $$A_{\frac{\ell}{2}} = A_o e^{-\pi} = \frac{A_o}{23} \quad \text{odn.} \quad A_\ell = \frac{A_o}{535}$$

U svrhu određivanja temperaturske provodljivosti k, je korisno znati u kom trenutku vremena t_s je na datoj dubini z_s temperatura tla jednaka srednjoj temperaturi T_s na zemljinom tlu. Kao što vidimo iz jedn. (18) je $T = T_s$ na dubinama koje dobijamo iz ovih uslova

$$e^{-z_s\sqrt{\frac{\nu}{2k}}} = 0 \quad i \quad \cos\left(\nu t_s - z_s\sqrt{\frac{\nu}{2k}}\right) = 0$$

Prva jednačina je ispunjena kada je $z_s = \infty$ i važi za svako $t = t_s$, a druga kada je

$$\nu t_s - z_s\sqrt{\frac{\nu}{2k}} = \frac{\pi}{2} \pm a\pi \qquad (a = 0, 1, 2, \ldots)$$

odn., ako se ograničimo na slučaj a = 0 kada je

(22) $$t_s = \frac{t_1}{4} + \frac{z_s}{2}\sqrt{\frac{t_1}{\pi k}}$$

Obično se očitavanjem srednje temperature T_s tla na poznatoj dubini z_s određuje vreme t_s i na osnovu ovih podataka dobija se k, dakle

(23) $$k = \frac{z_s^2\, t_1}{4\pi\left(t_s - \frac{t_1}{4}\right)^2}$$

U jednačini (18) koja pretstavlja rešenje jedn. (6) javljaju se dve nepoznate vrednosti: T_s i A_o. Vrednost T_s zavisi od opšte zagrejanosti zemljinog tla a vrednost A_o možemo dobiti ako uzmemo u obzir još dovođenje toplote u zemljino tle iz atmosfere i Sunca i odvođenje toplote iz zemljinog tla u atmosferu i još dalje u interplanetarni prostor. Ove pojave zavise od zračenja i turbulencije, a o njima ćemo da diskutujemo kasnije i to u svrhu izračunavanja amplitude A_o.

7. Efektivna temperatura Zemlje i temperatura stratosfere

Zemlja neprestano prima energiju Sunca, a neprestano i emituje toplotnu energiju u vidu dugotalasnog-tamnog zračenja. Može se smatrati da se srednja temperatura Zemljine atmosfere u toku vremena ne menja mnogo, da je atmosfera praktično u ravnoteži zračenja, da prima u vidu zračenja uglavnom onoliko energije koliko je na isti način jednovremeno i daje.

Videli smo (str. 122) da svaki cm^2 horizontalne površine Zemlje svaki minut primi prosečno 0,29 cal od Sunca. Ako smatramo da Zemlja zrači kao potpuno crno telo koje ima srednju temperaturu T, onda je

(1) $$\sigma T^4 = 0{,}29 \qquad \text{ili} \qquad T = 243^\circ \text{ aps.}$$

Ova temperatura zove se efektivna temperatura Zemlje i ona pretstavlja neku srednju temperaturu troposfere, koja je glavni izvor energije zračenja Zemlje kao nebeskog tela. Dobivena vrednost je nešto manja od stvarne, ali ipak odavde zaključujemo da Zemlja zrači skoro kao potpuno crno telo.

Temperatura u troposferi sa visinom opada, prosečno za 0,6 do 0,7°C/100 m, a u donjem delu stratosfere je konstantna. Opadanje temperature sa visinom u troposferi u velikoj meri je posledica mešanja vazdušnih masa i turbulencije u vezi sa adijabatskim hlađenjem uzlaznog vazduha. Od velikog značaja je pri tome oslobađanje toplote kondenzacije, zbog čega je vertikalni temperatur-

ni gradijent manji nego što bi bio inače.

U stratosferi vazduh se skoro ne meša i sadrži samo još neznatne količine vodene pare. Mešanje i kondenzacija mogu zbog toga samo u nežnatnoj meri uticati na temperaturu stratosfere. Ali, u stratosferi se često javljaju srazmerno jaka uzlazna i nizlazna strujanja koja bi, kad bi se vršila adijabatski, mogla u velikoj meri uticati na temperaturu vazduha na onim visinama.

U vezi s tim se potsetimo da se visina donje granice stratosfere (tropopauza) u kratkom roku od tri dana ili još kraćem može promenuti za 6000 m i više. Zajedno sa tropopauzom spušta i diže se i čitava stratosfera. Kad bi se ta kretanja vršila adijabatski, temperatura stratosfere bi se za kratko vreme promenila za ± 60°C i više. Pošto su stvarne temperaturne promene mnogo manje, to znači da se ta kretanja ne vrše adijabatski.

Iz svih navedenih razloga vidimo da jedino zračenje može bitno uticati na temperaturu stratosfere.

Možemo smatrati da vazduh donjeg dela stratosfere u najvećoj meri propušta kratkotalasno Sunčevo zračenje, a da u velikoj meri apsorbuje energiju dugotalasnog zračenja Zemlje i okolnih slojeva atmosfere. Za razliku od toga viši slojevi stratosfere zbog prisustva ozona (O_3) apsorbuju u velikoj meri i kratkotalasno zračenje talasnih dužina 0,23 do 0,32μ (Hartley-eva traka apsorpcije). Uticaj ove apsorpcije na temperaturu viših slojeva atmosfere vrlo je veliki. Zbog nje počinje na visini 20 km i još manjoj temperatura da raste sa visinom i to sve do nekako 50 km iznad mora, kada temperatura stratosfere postigne svoju maksimalnu vrednost od oko 270° aps. Od te visine se temperatura ponovo smanjuje sa visinom, i to do visine oko 75 km, gde postigne minimalnu vrednost oko 200° aps. U tom sloju između 20 i 75 km iznad površine mora jako je izražen i dnevni hod temperature, sa maksimalnom amplitudom oko 7°C na visini maksimalne temperature, tj. na visini nekako 50 km.

Prvo tumačenje temperature donjeg dela stratosfere potiče od Gold-a (1909) i Humphreys-a (1909). Korak dalje napravio je Emden (1913), koji je polazio od Schwarzschild-ovih jednačina 4 (3) i pretpostavio da je k_λ jednako za sve talasne dužine tamnog zračenja, a posledica je prisustva vodene pare. Tim problemima bavio se među ostalim i naš, u svetu poznati astronom M. Milanković (1920).

Prema Humphreys-u troposfera zrači naviše enegiju E_1. Stratosfera može zbog toga jednovremeno da prima najviše (ako je za dugotalasno zračenje moć apsorpcije a = 1) tačno toliko energije, dakle E_1, a zbog ravnoteže zračenja, koja se pretpostavlja, tačno toliko i emituje - pola naniže pola naviše. Ako srednju temperaturu troposfere označimo sa T_1 a temperaturu donjeg sloja stratosfere sa T_2, onda u jedinici vremena prema Stefan-ovom zakonu (a= 1) kroz jedinicu površine koja leži na granici između troposfere i stratosfere prolazi od dole nagore σT_1^4 energije zračenja, a jednovremeno stratosfera emituje na donjoj i gornjoj granici kroz svaku jedinicu površine σT_2^4 energije zračenja upolje. Uslov ravnoteže zračenja je prema tome

$$\sigma T_1^4 = 2\sigma T_2^4$$

što nam daje

(2) $$T_2 = T_1 : \sqrt[4]{2}$$

Ako za T_1 uzmemo gore izračutu vrednost 243°, dobijamo za temp. stratosfere T_2 = 205°C, što približno odgovara stvarnosti.

8. Bilans zračenja atmosfere

Sa problemima bilansa zračenja bavio se prvi Th. Homén u Helsinkiju koji je na osnovu dobrih merenja dao već približno dobru sliku bilansa zračenja (1896). U pogledu procentualne raspodele energije zračenja na pojedine oblasti spektra gledišta još uvek nisu ujednačena, ali razmimoilaženja nisu velika. Sa ovim problemima najviše su se bavili istraživači W. H. Dines, E. Alt, C. Simpson, F. Baur, H. Phillips i dr. Ovde ćemo navesti vrednosti po Bauru i Phillipsu sa nadopunama F. Möller-a.

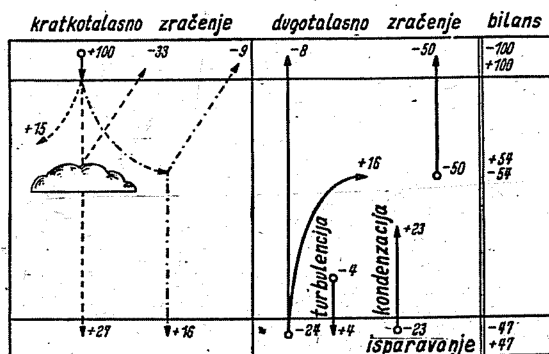
Od energije upućene sa Sunca na Zemlju biva 42% reflektovano na oblacima, zemljinom tlu i od atmosfere (0,42 = albedo zemlje). Prvi je našao približnu istu vrednost (= 0,43) Aldrich (1919) i to na sledeći način: U vedrom danu je procenio da je albedo površine zemljinog tla 0,08, a atmosfere 0,09, što zajedno daje 0,17. Pošto je uzeo dalje za albedo oblaka 0,78 koji pokrivaju oko 52% zemljine površine, to je odavde proračunao navedenu vrednost za albedo Zemlje kao planete.

Od Sunčeve energije koja u vidu kratkotalasnog zračenja dolazi na vrh atmosfere dospeva na Zemljinu površinu ukupno 43% (27% direktno, 16% indirektno putem difuzne refleksije). Atmosfera sa oblacima apsorbuje 15%, dok se preostali deo (= 42%, albedo Zemlje) nepretvoren vraća u vasionu (33% otpada na direktnu refleksiju na oblacima i zemljinoj površini a 9% na difuznu refleksiju).

Pošto se u atmosferi srednja temperatura - ako ne mislimo na promene koje su posledica menjanja otstojanja Zemlje od Sunca (u periheliju, tj. 1. januara je intenzitet Sunčevog zračenja za 7% veći nego u afeliju, 2. jula) - u toku vremena ne menja, to je atmosfera kao celina u ravnoteži zračenja. Zbog toga Zemlja emituje približno tačno toliko energije u vasionu koliko je jednovremeno od Sunca prima, dakle 58%. Od ovog broja otpada 8% na direktno izračivanje zemljine podloge, a 50% na direktno izračivanje atmosfere. U atmosferi se, prema tome, zadržava 50% ukupne Sunčeve energije koju Zemlja prima. Ovu energiju atmosfera dobija ovim putem:

Kao što smo već spomenuli atmosfera prima 15% Sunčeve enerije direktnom apsorpcijom kratkotalasnog Sunčevog zračenja. Zbog tamnog zračenja zemljinog tla dolazi u atmosferu 16% a zbog kondenzacije vode u atmosferi 23%. Konvekcijom, tj. mešanjem vazduha, odlazi iz atmosfere 4% u zemljino tle.

Navedeni podaci pretstavljau srednje godišnje vrednosti i odnose se na severnu hemisferu. Prikaz bilansa zračenja daje nam slika 35 i to na način koji je prvi primenio W.H.Dines.



Sl. 35. Srednji godišnji bilans zračenja na severnoj hemisferi

VII. EULEROV I LAGRANGEOV SISTEM JEDNAČINA

1. Eulerov sistem jednačina

Vazduh u atmosferi podvrgnut je raznim zakonima: zakonima dinamike, termodinamike, zračenja itd. Sve ove zakone možemo izraziti odgovarajućim jednačinama, obično diferencijalnim, koje pretstavljaju uslove pod kojima se vazduh u atmosferi kreće. Pri rešavanju raznih problema kretanja vazduha u atmosferi moramo uvek voditi računa o ovim uslovima i problem možemo smatrati da je rešen tek tada kada su zadovoljene uvek i svuda u polju spomenute uslovne jednačine.

Uslovne jednačine možemo da napišemo na dva načina. Prvo na način koji određuje uslove koji važe za vazduh u jednoj, inače makojoj, tačci u polju strujanja (Euler-ov sistem jednačina) i drugo na način koji određuje uslove pod kojima se kreće u atmosferi jedan, inače makoji, vazdušni delić (Lagrange-ov sistem jednačina). U stvari jedan i drugi sistem potiče od Eulera.

Ovde ćemo da napišemo Eulerov sistem jednačina.

U svakoj tačci A(x,y,z) polja strujanja i u makom trenutku vremena t postoji neki vektor brzine $\vec{u} = (u, v, w)$. Tamo imaju veličine stanja ϱ ili α, p, T, q i druge uvek neka tačno određene vrednosti. Sve ove veličine funkcije su koordinata x,y,z i vremena t i problem smatramo rešenim kada su nama sve te funkcije poznate. Rešenje tražimo dakle u vidu:

$$\text{(1)}\quad \vec{u} = \vec{u}(x,y,z,t),\quad \varrho = \varrho(x,y,z,t),\quad p = p(x,y,z,t),\quad T = T(x,y,z,t),\quad q = q(x,y,z,t),\ldots$$

sa početnim uslovima - u vremenu t = 0:

$$\text{(2)}\quad \vec{u} = \vec{u}_0,\quad \varrho = \varrho_0,\quad p = p_0,\quad T = T_0,\quad q = q_0,\ldots$$

Ovo rešenje treba da bude tako da su uvek i svuda u polju ispunjeni sledeći uslovi:

Sem na graničnim površinama uvek i svuda u polju ispunjene su Euler-ova hidrodinamička jednačina kretanja i jednačina kontinuiteta

$$\text{(3)}\quad \dot{\vec{u}} = -\nabla\varnothing - \alpha\nabla p - 2\vec{\omega}\times\vec{u} \qquad \text{gde je} \qquad \dot{\vec{u}} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}$$

odn.

$$\text{(4)}\quad \nabla\cdot(\varrho\vec{u}) + \frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0 \qquad \text{ili} \qquad \alpha\nabla\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\nabla\alpha - \frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0$$

Na makojoj graničnoj površini

$$\text{(5)}\quad f(x,y,z,t) = 0 \qquad \text{i} \qquad f'(x',y',z',t) = \dot{0}$$

to nije slučaj. Tamo mesto Euler-ove jednačine kretanja važi dinamički granični uslov

(6) $p(x,y,z,t) - p'(x',y',z',t) = 0 \qquad (\text{za } \vec{r} = \vec{r}')$

a mesto jednačine kontinuiteta kinematički granični uslov

(7)
$$(\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}') \cdot \nabla f(x,y,z,t) = 0$$
$$(\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}') \cdot \nabla' f'(x',y',z',t) = 0 \qquad (\text{za } \vec{r} = \vec{r}')$$

Mesto jednačina (6) i (7) možemo napisati jednačine **mešovitog graničnog uslova:**

(8)
$$\frac{\partial (p - p')}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla (p - p') = 0$$
$$\frac{\partial (p - p')}{\partial t} + \vec{u}' \cdot \nabla (p - p') = 0 \qquad (\text{za } \vec{r} = \vec{r}')$$

U polju je dalje uvek i svuda ispunjena jednačina stanja

(9)
$$p = R \varrho T$$

gde su sve veličine funkcije koordinata i vremena, a prema prvom i drugom principu termodinamike važe jednačine

(10)
$$\dot{U} = \dot{Q} - p \dot{\alpha}$$

i

(11)
$$\dot{S} = \frac{\dot{U}}{T} + \frac{p \dot{\alpha}}{T}$$

Jednačine (1) do (11) sačinjavaju Euler-ov sistem jednačina. Problem je sada pronaći jednačine (1) kada su nama poznati početni uslovi (2) pod pretpostavkom da budu jedn. (3) do (11) svuda i uvek ispunjene. Ovaj zadatak možemo rešiti samo za razne jednostavne uslove, za specijalne početne uslove i još to pod raznim pretpostavkama. Tako se napr. često pretpostavlja da se sve promene u polju vrše adijabatski ili izotermski. U prvom i drugom slučaju možemo mesto jedn. (9) do (11) da pišemo samo jednu jednačinu, tj. Poissonovu (str. 86) odn. jedn. Boyle-Mariotte-ovog zakona

(12) $p \varrho_o^{\kappa} = p_o \varrho^{\kappa} \qquad \text{odn.} \qquad p \varrho_o = p_o \varrho$

Ovakva jedna jednačina stanja, koja pored pritiska sadrži samo još jednu promenljivu, ali zbog toga sadrži parametre p_o i ϱ_o koji se mogu od delića do delića da menjaju, zove se prema V. Bjerknesu jednačina pijezotropije. Ako za svaki delić vazduha važi neka određena jednačina pijezotropije, onda je ovakva atmosfera pijezotropna. Individualni izvod

(13)
$$\gamma = \frac{d\varrho}{dp} = - \frac{1}{\alpha^2} \frac{d\alpha}{dp}$$

zove se koeficijenat pijezotropije.

Koeficijenat pijezotropije je u opštem slučaju funkcija koordinata i različit je od barotropskog **koeficijenta** (str. 14). U specijalnom slučaju kada su ova koeficijenta svuda u polju međusobno jednaka govorimo o autobarotropnom polju.

Iz definicije (13) proizlazi da možemo jednačinu pijezotropije pisati u obliku

(14) $\dot{\varrho} = \gamma \dot{p}$ ili $\dot{\alpha} = -\gamma \alpha^2 \dot{p}$

Za adijabatska i izotermska kretanja je koeficijenat pijezotropije

(15) $\gamma = \frac{1}{\kappa} \frac{\varrho}{p}$ odn. $\gamma = \frac{\varrho}{p}$

Za nestišljive tečnosti koeficijenat pijezotropije jednak je nuli.

2. Jedan integral hidrodinamičke jednačine kretanja vazduha

Zamislimo da se u atmosferi, gde su gustina i gradijent pritiska svuda i uvek jednaki, vazduh kreće horizontalno. Ortogonalni koordinatni sistem sa z osom prema zenitu možemo u ovom slučaju orijentisati ovako da je svuda u polju

(1) $$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Prema tome prve dve jednačine sistema 1 (3) odn. II 6 (8) glase

(2) $$\frac{du}{dt} = fv \qquad \frac{dv}{dt} = f(u_g - u)$$

gde je

(3) $$u_g = -\frac{\alpha}{f}\frac{\partial p}{\partial y}$$

Diferenciranjem jednačina (2) totalno po vremenu t, zanemarivši pri tome promenu parametra f i eliminisanjem veličina $\frac{du}{dt}$ i $\frac{dv}{dt}$ iz jedn. (2) i tako dobivenih jednačina dobijamo

(4) $$\frac{d^2u}{dt^2} = f^2(u_g - u) \quad \text{i} \quad \frac{d^2v}{dt^2} = -f^2 v$$

To su linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima (f smo smatrali konstantnim). Očigledno možemo opšte rešenje pisati na sledeći način (E. Gold. 1908)

(5) $$u = u_g + A \sin ft + B \cos ft \quad \text{i} \quad v = C \sin ft + D \cos ft$$

(A, B, C, D = integracione konstante).

Na početku našeg posmatranja neka se delić vazduha na koji se odnose gornje jednačine nalazi u tački $T(x_o, y_o)$ i neka se tada kreće brzinom (u_o, v_o). Za trenutak vremena t = 0 važi prema tome u saglasnosti sa jednačinama (5) i (2)

$$u_o = u_g + B, \quad v_o = D, \quad Af = fv_o, \quad Cf = f(u_g - u_o)$$

tako da je

(6) $u = u_g + v_o \sin ft - (u_g - u_o)\cos ft$ i $v = (u_g - u_o)\sin ft + v_o \cos ft$

Dobivene jednačine pretstavljaju rešenje jedn. (2). Vidimo da je, sem u slučaju kada je

(7) $$u_o = u_g \quad \text{i} \quad v_o = 0$$

kretanje talasaste prirode. U tom slučaju vazduh se brzinom u_g kreće duž x-ose, duž koje se inače vazduh talasa.

Jedn. (6) pretstavljaju rešenje jedn. (2) a to još ne znači da je ono dobro, da zadovoljava i sve ostale jednačine Eulerovog sistema. Prvo je pitanje da li je ono u saglasnosti sa jednačinom kontinuiteta, prema kojoj treba da bude u našem slučaju (ϱ = const) uvek i svuda

(8) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Pod pretpostavkom da je na početku (t = 0) brzina (u_o, v_o) svuda u polju jednaka, onda su u saglasnosti sa jedn. (6) u makojoj tačci polja i u makom trenutku vremena komponente brzine od prostornih koordinata potpuno nezavisne i jednačina kontinuiteta je pod ovim uslovom identično ispunjena.

Pretpostavljamo da su u strujnom polju sve veličine kontinuarno raspoređene i da nema unutrašnjih graničnih površina. Zbog toga nas ovde granični uslovi 1 (6) do (8) ne interesuju. U pogledu ostalih jednačina Eulerovog sistema (1 (9) do (11)) treba da imamo na umu da one za ϱ = const,(8), mogu da budu ispunjene samo pod uslovom da vazduh na svom putu samo na taj način prima i daje toplotu da se promene zapremine koje bi se pojavile prilikom kretanja vazduha prema oblasti visokog ili niskog atmosferskog pritiska tačno kompenzuju sa promenama koje izaziva dovođenje i odvođenje toplote. Ovako nešto svakako u prirodi ne može da postoji, pošto dovođenje i odvođenje toplote zavisi od raznih faktora. Nađeno rešenje pretstavlja zbog toga samo jedno približno rešenje Eulerovog sistema jednačina.

Ponovim integralenjem jedn. (6) dobijamo

(9) $$x = x_o + u_g t + \frac{v_o}{f}(1 - \cos ft) - \frac{u_g - u_o}{f} \sin ft$$
$$y = y_o + \frac{u_g - u_o}{f}(1 - \cos ft) + \frac{v_o}{f} \sin ft$$

tj. položaj delića koji je na početku posmatranja(u vremenu t = 0) bio u tačci x_o, y_o gde je tada imao brzinu (u_o, v_o).

Jedn. (9) daju nam mogućnost da nađemo položaj svakog delića vazduha u prostoru ako znamo njegove početne koordinate x_o i y_o u vremenu t = 0. Trajektorije su u opštem slučaju talasne linije, a glavno premeštanje vazduha vrši se u pravcu izobara. Period talasanja je

(10) $$T = \frac{2\pi}{f} = \frac{12}{\sin\varphi} \text{ časova}$$

i jednak je vremenu trajanja jednog obilaska tela po krugu inercije (str. 32). Makoji talas ima talasnu dužinu

(11) $$\lambda = x(x_o,y_o,t + T) - x(x_o,y_o,t) = \frac{2\pi u_g}{f}$$

i jednaka je dužini kruga inercije (str. 32). Brzina prostiranja ovih talasa je

(12) $$c = \frac{\lambda}{T} = u_g .$$

Srazmerna je gradijentu pritiska i specifičnoj zapremini vazduha a obrnuto je srazmerna parametru sile devijacije (3). Na geografskoj širini $\varphi = 45^o$ neka bude $c = u_g = 10 \text{ m sec}^{-1}$. Pod ovim uslovom je $\lambda = 628$ km. Prirodu ovakvog talasanja vazduha u atmosferi J.W. Sandström zapazio je već 1910. godine.

U svrhu lakšeg razumevanja daljih izlaganja je možda korisno da prikažemo još jedan način kojim se vidi da je pod gornjim uslovima jednačina kontinuiteta ispunjena.

Zamislimo elemenat mase vazduha koji se na početku ($t = 0$) nalazi u elementarnom kvadru sa ivicama dx_o, dy_o, dz_o. Ivice dx_o i dy_o spajaju se u tačkama $T_1(x_o,y_o)$, $T_2(x_o + dx_o, y_o)$, $T_3(x_o + dx_o, y_o + dy_o)$ i $T_4(x_o, y_o + dy_o)$. Taj delić vazduha se zajedno sa okolnim vazduhom kreće i u trenutku vremena t on se nalazi u nekoj novoj zapremini koja je određena analognim tačkama $T_1'(x,y)$, $T_2'(x + dx, y)$, $T_3'(x + dx, y + dy)$ i $T_4'(x, y + dy)$. Ove nove koordinate određene su jednačinama (9). Ako pretpostavimo, kao gore, da je na početku ($t = 0$) brzina (u_o,v_o) bila svuda u polju jednaka, onda je u saglasnosti sa jedn. (9) očigledno $dx = dx_o$ i $dy = dy_o$. Pošto se kretanje vrši horizontalno (vazduhu se gustina ne menja) to je i $dz = dz_o$. Zapremina vazduha se prema tome u toku vremena ne menja, što znači da je u našem slučaju, uz učinjene pretpostavke, jednačina kontinuiteta ispunjena. Vazduh se kreće kao čvrsto telo, sve trajektorije su međusobno paralelne.

3. Jednačine kretanja i kontinuiteta u Lagrangeovom sistemu jednačina

Rešenjem (9) iz prethodnog odeljka dat je položaj u prostoru jednog inače makog delića vazduha koji je na početku (u vremenu $t = 0$) bio u tački $T(x_o,y_o)$. Taj delić nalazi se u trenutku vremena t u tački $T'(x,y)$, tj. na mestu koji zavisi od početnog položaja, od početnih koordinata tog delića. Svakom deliću u polju strujanja pripada jedna i samo jedna tačka $T(x_o,y_o)$, tj. jedan i samo jedan početni položaj. Zbog toga možemo jednostavno da govorimo o delićima $(x_o = x_{o1}, y_o = y_{o1})$, $(x_o = x_{o2}, y_o = y_{o2})$ itd. Početne koordinate označavaju dakle deliće vazduha i zovu se <u>označavajuće koordinate</u>.

U opštem slučaju, kada se kretanje ne vrši samo u horizontalnoj ravni, koordinate x,y,z funkcije su označavajućih koordinata x_o,y_o,z_o i vremena t i opšte rešenje (koje je analogno rešenju (9) iz prethodnog odeljka) Eulerovog sistema jednačina bilo bi

(1) $$\begin{aligned} x &= x(x_o,y_o,z_o,t) \\ y &= y(x_o,y_o,z_o,t) \\ z &= z(x_o,y_o,z_o,t) \end{aligned} \qquad \text{ili} \qquad \vec{r} = \vec{r}(x_o,y_o,z_o,t)$$

Ako smatramo da su početne koordinate x_o,y_o,z_o jednoznačne i

neprekidne funkcije nekih parametara - generalisanih označavajućih koordinata a,b,c - onda mesto (1) možemo pisati

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= x(a,b,c,t) \\ y &= y(a,b,c,t) \\ z &= z(a,b,c,t) \end{aligned} \qquad \text{ili} \qquad \vec{r} = \vec{r}(a,b,c,t)$$

Jednačine (2) daju nam za makoji trenutak vremena t položaj makog delića vazduha a,b,c koji prilikom svog kretanja svoje označavajuće koordinate a,b,c zadržava. Nasuprot tome njegove koordinate položaja x,y,z po pravilu se u toku vremena menjaju.

Jednačine (1) i (2) govore o položaju nekog određenog delića vazduha u prostoru. Za svaki takav delić važe jednačine dinamike i termodinamike i naš zadatak je sada da napišemo te jednačine, tj. jednačine koje sadrže kao nezavisne promenljive označavajuće koordinate a,b,c i vreme t. Sistem takvih jednačina sačinjava Lagrangeov sistem jednačina. Postoje dakle dva metoda rešavanja problema kretanja vazduha u atmosferi: Eulerov i Lagrangeov. Kod prvo spomenutog su nezavisne promenljive koordinate položaja x, y, z i vreme t, a kod drugog nezavisne promenljive su označavajuće koordinate a,b,c i vreme t.

Prvo je pitanje kako dobiti brzinu u Lagrangeovom sistemu jednačina.

U intervalu vremena dt položaj delića a,b,c u prostoru promeni se za

$$d\vec{r} = \vec{r}(a,b,c,t+dt) - \vec{r}(a,b,c,t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\,dt$$

što znači da taj delić ima brzinu

$$(3)\qquad \dot{\vec{r}}(a,b,c,t) = \vec{u}(a,b,c,t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(a,b,c,t)$$

sa komponentama

$$(3')\qquad \begin{aligned} \dot{x}(a,b,c,t) &= u(a,b,c,t) = \frac{\partial x}{\partial t}(a,b,c,t) \\ \dot{y}(a,b,c,t) &= v(a,b,c,t) = \frac{\partial y}{\partial t}(a,b,c,t) \\ \dot{z}(a,b,c,t) &= w(a,b,c,t) = \frac{\partial z}{\partial t}(a,b,c,t) \end{aligned}$$

Slično dobijamo za ubrzanje

$$(4)\qquad \ddot{\vec{r}}(a,b,c,t) = \dot{\vec{u}}(a,b,c,t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(a,b,c,t) = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2}(a,b,c,t)$$

koje ima komponente

$$(4')\qquad \begin{aligned} \ddot{x}(a,b,c,t) &= \dot{u}(a,b,c,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(a,b,c,t) = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(a,b,c,t) \\ \ddot{y}(a,b,c,t) &= \dot{v}(a,b,c,t) = \frac{\partial v}{\partial t}(a,b,c,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(a,b,c,t) \\ \ddot{z}(a,b,c,t) &= \dot{w}(a,b,c,t) = \frac{\partial w}{\partial t}(a,b,c,t) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(a,b,c,t) \end{aligned}$$

Jednostavno dođemo i do jednačina kretanja u Lagrangeovom sistemu:

Ako prvo u jednačini kretanja 1 (3) sve članove prebacimo na levu stranu i onda jednačinu skalarno množimo redom vektorima

$$\left(\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}\right), \left(\frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial b}\right), \left(\frac{\partial x}{\partial c}, \frac{\partial y}{\partial c}, \frac{\partial z}{\partial c}\right)$$

dobijamo sledeće tri Lagrangeove hidrodinamičke jednačine kretanja

(5')
$$\begin{aligned}
(\dot{u}-C_x)\frac{\partial x}{\partial a} + (\dot{v}-C_y)\frac{\partial y}{\partial a} + (\dot{w}-C_z)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial \emptyset}{\partial a} + \alpha\frac{\partial p}{\partial a} &= 0 \\
(\dot{u}-C_x)\frac{\partial x}{\partial b} + (\dot{v}-C_y)\frac{\partial y}{\partial b} + (\dot{w}-C_z)\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial \emptyset}{\partial b} + \alpha\frac{\partial p}{\partial b} &= 0 \\
(\dot{u}-C_x)\frac{\partial x}{\partial c} + (\dot{v}-C_y)\frac{\partial y}{\partial c} + (\dot{w}-C_z)\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial \emptyset}{\partial c} + \alpha\frac{\partial p}{\partial c} &= 0
\end{aligned}$$

gde smo sa $-C_x$, $-C_y$, $-C_z$ označili komponente Coriolisovog ubrzanja (str. 26). Ove tri jednačine možemo pisati u vidu sledeće vektorske jednačine (I 3)

(5)
$$\nabla_o \vec{r} \cdot (\dot{\vec{u}} + 2\vec{\omega} \times \vec{u}) + \nabla_o \emptyset + \alpha \nabla_o p = 0$$

gde simbol ∇_o znači simbolični vektor

$$\nabla_o = \left(\frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial b}, \frac{\partial}{\partial c}\right)$$

Da bismo napisali jednačinu kontinuiteta u Lagrangeovom sistemu, zamislimo elementarni paralelepiped sa ivicama

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial a} da, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial b} db, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial c} dc$$

U ovakvom paralelepipedu sa zapreminom

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial b} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial c}\, da\, db\, dc = \frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)}\, da\, db\, dc$$

nalazi se masa $\varrho \frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)}\, da\, db\, dc$. Ovde je

(6)
$$\frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial x}{\partial b}, & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$

funkcionalna determinanta funkcija x, y, z.

Posmatrani paralelepiped ograničen je stalno jednim te istim delićima vazduha. Na svakoj graničnoj površini je naime ili a ili b ili c = const a ostale označavajuće koordinate kreću se na tim površinama stalno u jednakim granicama. Zbog toga se u takvoj zapremini u toku vremena masa ne menja. Kad uzmemo ovo u obzir vidimo, da jednačina kontinuiteta u Lagrange-ovom sistemu glasi

(7)
$$\varrho \frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)} = \varrho_o \frac{D(x_o,y_o,z_o)}{D(a,b,c)}$$

(ϱ_o = gustina delića a,b,c u vremenu t = 0).

Kada su označavajuće koordinate jednake početnim koordinatama položaja x_o, y_o, z_o, jednačina kontinuiteta dobija oblik

(8) $$\rho \frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)} = \rho_o \qquad (a=x_o,\ b=y_o,\ c=z_o)$$

Ako je pored toga tečnost nestišljiva ($\rho = \rho_o$), onda dobijamo

(9) $$\frac{D(x,y,z)}{D(x_o,y_o,z_o)} = 1$$

4. Granični uslovi u Lagrangeovom sistemu jednačina

Jednačina granične površine u Lagrangeovom sistemu neka glasi

(1) $$f(a,b,c,t) = 0 \quad i \quad f'(a',b',c',t) = 0$$

(označavajuće koordinate delića s jedne strane granične površine smo označili bez crtice, a s druge strane crticom). Kinematički granični uslov dobijamo u ovom sistemu pomoću jednačina II 1 (17) u kojima se javljaju izrazi $\nabla f(x,y,z,t)$ i $\nabla f'(x',y',z',t)$. Ove funkcije treba prvo izraziti pomoću koordinata koje su u ovom sistemu nezavisne, tj. pomoću označavajućih koordinata.

Očigledno je (I 3)

(2) $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial b} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial f}{\partial c} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c} \end{aligned} \qquad \text{ili} \qquad \nabla_o f = \nabla_o \vec{r} \cdot \nabla f$$

i odavde

(3) $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{D(f,y,z)}{D(a,b,c)} : \frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{D(x,f,z)}{D(a,b,c)} : \frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{D(x,y,f)}{D(a,b,c)} : \frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)} \end{aligned} \qquad \text{ili} \qquad \nabla f = (\nabla_o \vec{r})^{-1} \cdot \nabla_o f$$

Na desnim stranama napisane tri jednačine stoje količnici odgovarajućih funkcionalnih determinanata, a simbolom $(\nabla_o \vec{r})^{-1}$ označeni tenzor je recipročan tenzoru $\nabla_o \vec{r}$. Lako se možemo uveriti da je

(4) $$\frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)}(\nabla_o \vec{r})^{-1} = \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}, & \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a}, \quad \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} \\ \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}, & \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}, \quad \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}, & \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a}, \quad \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} \end{cases}$$

Ako sada dobivene vrednosti (3) i analogne za koordinate sa crticom uzmemo u jednačini II 1 (17), gore pomenutoj, u obzir dobijamo za kinematički granični uslov u Lagrangeovom sistemu jednačina

$$(5)\quad \begin{aligned} &(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t}).(\nabla_o \vec{r})^{-1} \cdot \nabla_o f = 0 \\ &(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t}).(\nabla'_o \vec{r}')^{-1} \cdot \nabla'_o f' = 0 \end{aligned} \qquad (\text{za } \vec{r} = \vec{r}')$$

Na graničnoj površini treba dalje da budu ispunjeni i dinamički granični uslov, koji možemo u Lagrangeovom sistemu da napišemo na sledeći način

$$(6)\qquad p(a,b,c,t) - p'(a',b',c',t) = 0 \qquad (\text{za } \vec{r} = \vec{r}')$$

i mešoviti granični uslov koji dobijamo iz jedn. 1 (8) (str. 132) kad uzmemo u obzir da je totalna promena pritiska u Eulerovom sistemu jednaka parcijalnoj promeni po vremenu u Lagrangeovom sistemu. Prema tome je

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p(x,y,z,t)}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla p(x,y,z,t) = \frac{\partial p(a,b,c,t)}{\partial t} \\ &\frac{\partial p'(x',y',z',t)}{\partial t} + \vec{u}'\cdot\nabla p'(x',y',z',t) = \frac{\partial p'(a',b',c',t)}{\partial t} \end{aligned} \qquad (\text{za } \vec{r} = \vec{r}')$$

Oduzimanjem jedne jednačine od druge, kad uzmemo u obzir mešoviti granični uslov 1 (8) i da u Lagrangeovom sistemu mesto $\vec{u}$ i $\vec{u}'$, ∇p i $\nabla p'$ treba da pišemo $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$ i $\frac{\partial \vec{r}'}{\partial t}$ odn. $(\nabla_o \vec{r})^{-1} \cdot \nabla_o p$ i $(\nabla_o \vec{r}')^{-1} \cdot \nabla_o p'$, dobijamo jednačine mešovitog graničnog uslova (za $\vec{r} = \vec{r}'$)

$$(7)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial p(a,b,c,t)}{\partial t} - \frac{\partial p'(a',b',c',t)}{\partial t} - (\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t})\cdot(\nabla_o \vec{r}')^{-1} \cdot \nabla_o p'(a',b',c',t) = 0 \\ &\frac{\partial p(a,b,c,t)}{\partial t} - \frac{\partial p'(a,b',c',t)}{\partial t} - (\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t})\cdot(\nabla_o \vec{r})^{-1} \cdot \nabla_o p(a,b,c,t) = 0 \end{aligned}$$

5. Lagrangeov sistem jednačina

Uslovne jednačine Lagrangeovog sistema jednačina sadrže kao nezavisne promenljive označavajuće koordinate a, b, c i vreme t. Analogno kao kod Eulerovog metoda, tražimo ovde rešenje u vidu funkcija

$$(1)\quad \begin{aligned} &\vec{r} = \vec{r}(a,b,c,t), \qquad \vec{u} = \vec{u}(a,b,c,t) \\ &\varrho = \varrho(a,b,c,t), \quad p = p(a,b,c,t), \quad T = T(a,b,c,t), \ldots \end{aligned}$$

sa početnim uslovima (u vremenu t = 0)

$$(2)\quad \begin{aligned} &\vec{r} = \vec{r}_o(a,b,c) \qquad \vec{u} = \vec{u}_o(a,b,c) \\ &\varrho = \varrho_o(a,b,c), \quad p = p_o(a,b,c), \quad T = T_o(a,b,c), \ldots \end{aligned}$$

Ove veličine pretstavljaju date funkcije koordinata a, b, c u trenutku vremena t = 0.

Rešenje (1) treba da zadovoljava date granične uslove i treba da bude uvek i svuda u saglasnosti sa sledećim uslovima:

Za svaki delić vazduha, ukoliko se ne nalazi na nekoj graničnoj površini, gde može da postoji konačna razlika između označavajućih koordinata susednih delića s jedne i druge strane površine, važi jednačina kretanja 3 (5)

(3) $$\nabla_o \vec{r} \cdot (\dot{\vec{u}} + 2\vec{\omega} x \vec{u}) + \nabla_o \emptyset + \alpha \nabla_o p = 0$$

Sem na graničnim površinama treba dalje da bude ispunjena jednačina kontinuiteta 3 (7)

(4) $$\varrho \frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)} = \varrho_o \frac{D(x_o,y_o,z_o)}{D(a,b,c)}$$

Na graničnoj površini treba da bude ispunjen dinamički granični uslov 4 (6)

(5) $$p(a,b,c,t) - p'(a',b',c',t) = 0 \qquad (\text{za } \vec{r} = \vec{r}')$$

Pored toga tamo važe još kinematički i mešoviti granični uslov 4 (5) i 4 (7)

(6) $$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla_o \vec{r})^{-1} \cdot \nabla_o f = 0$$ $$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla_o \vec{r}')^{-1} \cdot \nabla_o f' = 0 \qquad (\text{za } \vec{r} = \vec{r}')$$

odn. (za $\vec{r} = \vec{r}'$)

(7) $$\frac{\partial p(a,b,c,t)}{\partial t} - \frac{\partial p'(a',b',c',t)}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla_o \vec{r}')^{-1} \cdot \nabla_o p'(a',b',c',t) = 0$$ $$\frac{\partial p(a,b,c,t)}{\partial t} - \frac{\partial p'(a',b',c',t)}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla_o \vec{r})^{-1} \cdot \nabla_o p(a,b,c,t) = 0$$

Svuda i uvek važi jednačina gasnog stanja i jednačine prvog i drugog principa termodinamike. U ovim jednačinama treba sve promenljive smatrati kao funkcije nezavisnih promenljivih a,b,c i t.

6. Metod linearizacije hidrodinamičkih jednačina

Tražeći rešenje problema ciklogeneze (postanka ciklona), a polazeći sa tačke gledišta da su cikloni posledica određenih deformacija graničnih površina između različito zagrejanih vazdušnih masa, V. Bjerknes je u više svojih radova (1926, 1927, 1929, 1933) razvio sistem pomoću koga mogu razna poremećenja na graničnim površinama i u atmosferi uopšte srazmerno jednostavno da se prouče.

Zamislimo neko jednostavno stanje atmosfere, tzv. osnovno stanje. To stanje zamišljamo tako da se odmah vidi da je u saglasnosti sa jednačinama dinamike i termodinamike i da zbog toga pretstavlja neko rešenje Eulerovog i Lagrangeovog sistema jednačina.

Možemo zamisliti razna takva osnovna stanja. Kao najjednostavnije bilo bi napr. takvo da je atmosfera u stanju mirovanja ili da se javljaju u njoj samo horizontalna pravolinijska i paralelna strujanja vazduha. Takva atmosfera može da se sastoji iz pojedinih vazdušnih slojeva, različito zagrejanih, koji se međusobno graniče preko više ili manje nagnutih graničnih površina.

Sada zamislimo da je iz nekog razloga došlo do poremećenja osnovnog stanja. Pitamo se da li za ovakva, srazmerno mala poremećenja, možemo da primenimo neka pojednostavljenja u Eulerovom i Lagrangeovom sistemu jednačina i da li na osnovu takvih pojednostavljenja možemo srazmerno jednostavno integraliti inače složeni sistem jednačina dinamike i termodinamike.

U jednačinama koje treba da integralimo možemo svaku veličinu stanja da izrazimo kao zbir iz poznate vrednosti koja se odnosi na osnovno stanje i srazmerno male nepoznate vrednosti koja je izazvana nastalim poremećenjem i koja se traži. Pošto je drugi pomenuti sumand u poređenju sa prvim mala veličina prvog reda, to možemo proizvod dve ili više takvih srazmerno malih vrednosti zanemariti. Radi se dakle o linearizaciji sistema naših jednačina i o metodu koji je V. Bjerknes primenio na meteorologiju i detajlno razradio. Na taj način dobijamo približne jednačine koje se zovu hidrodinamičke jednačine poremećaja.

Poznavanjem osnovnog stanja lako nađemo Eulerov sistem jednačina koji se odnosi na srazmerno mala poremećenja tog stanja.

Svaku veličinu koja se odnosi na poznato osnovno stanje označićemo odgovarajućim slovom sa crticom. Srazmerno male promene ovih veličina, koje su posledica poremećenja osnovnog stanja, označićemo istim slovima samo bez crtice. Ove promene su, kao što je rečeno, male veličine prvog reda i odnose se (u Eulerovom sistemu) na jedan, inače makoji, trenutak vremena t i na jednu, inače makoju tačku polja. Prema tome su funkcije vremena t i koordinata x,y, z. Pošto se nigde u polju geopotencijal $\emptyset$ u toku vremena ne menja, to Eulerov sistem jednačina poremećenja promene geopotencijala ne sadrži.

U Eulerovom sistemu jednačina neka bude osnovno stanje dato sledećim funkcijama (1 (1))

$$(1)\qquad \bar{\vec{u}} = \bar{\vec{u}}\,(x,y,z,t),$$
$$\bar{\varrho} = \bar{\varrho}\,(x,y,z,t),\quad \bar{p} = \bar{p}(x,y,z,t),\quad \bar{T} = \bar{T}(x,y,z,t),\ldots$$

Rešenje poremećenog stanja biće pretstavljeno veličinama $\bar{\vec{u}} + \vec{u}$, $\bar{\varrho} + \varrho$, $\bar{p} + p$, $\bar{T} + T,\ldots$ kao funkcijama koordinata x,y,z i vremena t sa početnim uslovima u vremenu t = 0:

$$(2)\qquad \bar{\vec{u}} + \vec{u} = \bar{\vec{u}}_o + \vec{u}_o,\quad \bar{\varrho} + \varrho = \bar{\varrho}_o + \varrho_o,\quad \bar{p} + p = \bar{p}_o + p_o,\ldots$$

Ove veličine su date funkcije koordinata x,y,z.

Do aproksimativnih hidrodinamičkih jednačina poremećenja lako dođemo upoređenjem jednačina osnovnog stanja sa odgovarajućim jednačinama poremećenog sistema.

Jednačina kretanja 1 (3) u poremećenoj atmosferi glasi

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\vec{u}} + \vec{u}) + (\bar{\vec{u}} + \vec{u})\cdot\nabla(\bar{\vec{u}} + \vec{u}) + \nabla\emptyset + (\bar{\alpha} + \alpha)\nabla(\bar{p} + p) +$$
$$2\vec{\omega}\times(\bar{\vec{u}} + \vec{u}) = 0$$

Ako od ove jednačine oduzmemo odgovarajuću jednačinu koja se odnosi na osnovno stanje i ako uzmemo u obzir da veličine $\vec{u}\nabla\vec{u}$ i $\alpha\nabla p$, kao male veličine drugog reda možemo zanemariti dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu dinamike za poremećeno stanje

$$(3)\qquad \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \bar{\vec{u}}\cdot\nabla\vec{u} + \vec{u}\cdot\nabla\bar{\vec{u}} + \bar{\alpha}\nabla p + \alpha\nabla\bar{p} + 2\vec{\omega}\times\vec{u} = 0$$

Dobivena jednačina je parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda u kojoj su $\bar{\vec{u}}$, $\vec{u}$, $\bar{p}$, p,... funkcije koordinata x,y,z i vremena t. Tražimo funkcije $\vec{u}$, p,... koje pretstavljaju varijacije veličina $\bar{\vec{u}}$, $\bar{p}$,... kao poznatih funkcija koordinata i vremena.

Sličnim postupkom dobijamo i ostale jednačine Eulerovog sistema

jednačina poremećaja.

U Lagrange-ovom sistemu osnovno stanje je određeno na sledeći način:

(4) $\vec{\bar{r}} = \vec{\bar{r}}(a,b,c,t)$ $\vec{\bar{u}} = \vec{\bar{u}}(a,b,c,t)$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}(a,b,c,t),\dots$

sa početnim uslovima (u vremenu t = 0)

(5) $\vec{\bar{r}} = \vec{\bar{r}}_o(a,b,c)$; $\vec{\bar{u}} = \vec{\bar{u}}_o(a,b,c)$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}_o(a,b,c),\dots$

Sada i kasnije pretpostavićemo da su označavajuće koordinate jednake početnim kartezijskim koordinatama vazdušnih delića kod osnovnog stanja, da je dakle

(6) $a = \bar{x}_o$, $b = \bar{y}_o$, $c = \bar{z}_o$ i $\vec{\bar{r}}_o(a,b,c) = \vec{\bar{r}}_o = (\bar{x}_o,\bar{y}_o,\bar{z}_o)$

Tražimo veličine poremećenog stanja

$$\vec{\bar{r}} + \vec{r},\quad \vec{\bar{u}} + \vec{u},\quad \bar{\rho} + \rho,\quad \bar{p} + p,\dots$$

odn. poremećenja $\vec{r}, \vec{u}, \rho, p, T, q,\dots$ kao funkcije označavajućih koordinata $a = \bar{x}_o$, $b = \bar{y}_o$, $c = \bar{z}_o$ i vremena t. Rešenje treba da bude u saglasnosti sa svim jednačinama Lagrangeovog sistema. Tako treba napr. da bude zadovoljena jednačina dinamike poremećenog sistema koja glasi (5 (3))

$$\nabla_o(\vec{\bar{r}} + \vec{r})\cdot\left[\dot{\vec{\bar{u}}} + \dot{\vec{u}} + 2\vec{\omega}\times(\vec{\bar{u}} + \vec{u})\right] + \nabla_o(\bar{\varnothing} + \varnothing) + (\bar{\alpha} + \alpha)\nabla_o(\bar{p} + p) = 0$$

Oduzimanjem odgovarajuće jednačine za neporemećeni sistem, tj. jednačine 5 (3) za neporemećeni sistem u kojoj zamišljamo da su sve zavisne promenljive označene crticom i zanemarivanjem malih veličina drugog reda dobijamo jednačinu kretanja Lagrangeovog sistema koja je približna i linearna i odnosi se na poremećenu atmosferu. Ona glasi

(7) $\nabla_o\vec{\bar{r}}\cdot\dot{\vec{u}} + \nabla_o\vec{r}\cdot\dot{\vec{\bar{u}}} + 2\nabla_o\vec{\bar{r}}\cdot\vec{\omega}\times\vec{u} + 2\nabla_o\vec{r}\cdot\vec{\omega}\times\vec{\bar{u}} + \nabla_o\varnothing + \alpha\nabla_o\bar{p} + \bar{\alpha}\nabla_o p = 0$

Jednostavno dolazimo napr. i do jednačine kontinuiteta poremećenog stanja. Za osnovno neporemećeno stanje ona glasi

(8) $$\bar{\rho}\,\frac{D(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}{D(a,b,c)} = \bar{\rho}_o$$

a za poremećeno

(9) $$(\bar{\rho} + \rho)\frac{D(\bar{x} + x,\ \bar{y} + y,\ \bar{z} + z)}{D(a,b,c)} = \bar{\rho}_o + \rho_o$$

Pošto je

$$\frac{D(\bar{x}+x,\bar{y}+y,\bar{z}+z)}{D(a,b,c)} = \frac{D(\bar{x},\bar{y}+y,\bar{z}+z)}{D(a,b,c)} + \frac{D(x,\bar{y}+y,\bar{z}+z)}{D(a,b,c)} =$$

$$\frac{D(\bar{x},\bar{y},\bar{z}+z)}{D(a,b,c)} + \frac{D(\bar{x},y,\bar{z}+z)}{D(a,b,c)} + \frac{D(x,\bar{y},\bar{z}+z)}{D(a,b,c)} + \dots =$$

$$\frac{D(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}{D(a,b,c)} + \frac{D(\bar{x},\bar{y},z)}{D(a,b,c)} + \frac{D(\bar{x},y,\bar{z})}{D(a,b,c)} + \frac{D(x,\bar{y},\bar{z})}{D(a,b,c)} + \dots$$

to oduzimanjem jedn. (8) od jedn. (9) ako determinante kao i druge vrednosti koje su male veličine drugog i trećeg reda zanemarimo, dobijamo jednačinu kontinuiteta za mala poremećenja

$$(10)\qquad \bar{\varrho}\left[\frac{D(\bar{x},\bar{y},z)}{D(a,b,c)}+\frac{D(\bar{x},y,\bar{z})}{D(a,b,c)}+\frac{D(x,\bar{y},\bar{z})}{D(a,b,c)}\right]+\varrho\frac{D(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}{D(a,b,c)}=\varrho_o$$

Teže je napisati opšti oblik kinematičkog graničnog uslova poremećenog sistema. Ovo ovde nećemo uraditi, pošto nas interesuju samo jednostavnija rešenja, do kojih se lako neposredno dođe. U svojim teorijskim radovima i V. Bjerknes je polazio od jednostavnih osnovnih stanja i ovde nemamo potrebe da se dalje zadržavamo na izvođenju ostalih opštih jednačina poremećaja.

Najjednostavnije osnovno stanje je atmosfera u stanju mirovanja. Ovakva atmosfera bila je opisana u četvrtom poglavlju. U sledećem poglavlju upoznaćemo se još sa nekim osnovnim stanjima atmosfere, a tek kasnije ćemo se upoznati sa raznim pporemećenjima osnovnih stanja atmosfere. Takva poremećenja pretstavljaju uvek nestacionarna strujanja vazduha.

VIII. STACIONARNA STRUJANJA VAZDUHA U ATMOSFERI

1. Geostrofski vetar

Svakodnevna posmatranja razvoja vremena pomoću sinoptičkih vremenskih karata pokazuju nam da na visinama gde se sile trenja često mogu zanemariti, vetrovi duvaju uglavnom u pravcu izobara. Duvaju u tom smislu da važi sledeće pravilo: Kada nam vetar duva u leđa, nizak vazdušni pritisak leži na našoj levoj strani odn. desnoj strani ako se nalazimo na južnoj hemisferi.

Posmatrajmo u vezi s tim, pod kojim se uslovima u atmosferi mogu održavati u otsustvu sila trenja pravolinijska, neubrzana i horizontalna strujanja vazduha. Vetar koji pretstavlja takva strujanja zove se geostrofski vetar.

U ortogonalnom koordinatnom sistemu sa z-osom prema zenitu i x-osom prema istoku neka duva geostrofski vetar brzinom

(1) $$\vec{u}_g = (u_g, v_g, 0)$$

Prema definiciji geostrofskog vetra treba da bude

(2) $$\dot{u}_g = \dot{v}_g = 0$$

Zbog toga u oblasti gde duvaju ovi vetrovi važe sledeće jednačine kretanja (str. 33)

(3) $$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + f v_g &= 0 \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - f u_g &= 0 \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + f' u_g &= 0 \end{aligned}$$

Prve dve jednačine možemo pisati i u vidu sledeće vektorske jednačine

(4) $$-\frac{1}{\rho}\nabla_h p - f\vec{k} \times \vec{u}_g = 0$$

gde je

(5) $$\nabla_h p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, 0\right)$$

horizontalna komponenta gradijenta pritiska.

Glavne osobine geostrofskog vetra bile bi sledeće:

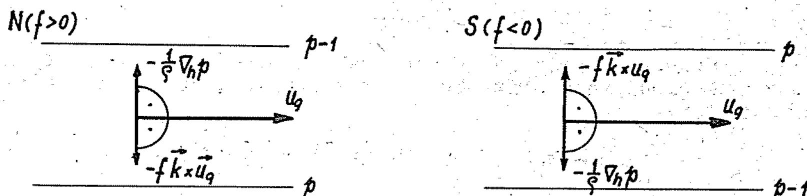
1. Iz jedn. (4) vidimo da u oblasti gde duvaju geostrofski vetrovi horizontalnoj gradijentnoj sili drži ravnotežu Coriolisova sila, što znači da geostrofski vetrovi duvaju u pravcu izobara u gore naznačenom smislu (sl. 36).

2. Iz prve i druge jedn. (3) dobijamo za brzinu geostrofskog vetra

(6) $$|\vec{u}_g| = \frac{1}{f\varrho}|\nabla_h p| \quad \text{gde je} \quad |\vec{u}_g| = +\sqrt{u_g^2 + v_g^2}$$

Ta brzina je srazmerna horizontalnoj komponenti gradijenta pritiska a obrnuto je srazmerna parametru sile devijacije, tj. sinusu geografske širine i gustini vazduha. Pod jednakim uslovima duvaju dakle na manjim geografskim širinama jači vetrovi nego na većim. Koliki mogu da budu ti vetrovi vidimo iz tablice. Podaci važe za $\varrho = 1$ kg m^{-3} i $|\nabla_h p| = 1$ mb/100 km.

φ =	10	30	50	70	90°
u_g =	39,4	13,7	8,95	7,30	6,86 m sec^{-1}



Sl. 36
Raspodela sila pri geostrofskom vetru

3. Iz jedn. (3^3) vidimo da se u oblasti geostrofskih vetrova opadanje pritiska sastoji iz dva dela. Jedan, i to mnogo veći deo, ništa ne zavisi od brzine i pretstavlja opadanje koje bi se pod inače jednakim uslovima javljalo u mirnoj atmosferi. Drugi zavisi od komponente brzine u pravcu zapad istok. Iz ranije diskutovanih razloga je razumljivo zašto se on pojavljuje (II 5).

4. Množenjem jedn. (3^1) i (3^2) sa ϱ i diferenciranjem prve od ovih jednačina parcijalno po y a druge parcijalno po x i oduzimanjem, kad uzmemo u obzir da se strujanje vrši horizontalno i smatramo f konstantnim, dobijamo

(7) $$\nabla\cdot(\varrho\,\vec{u}_g) = 0$$

U oblasti geostrofskih vetrova je, prema tome, jednačina kontinuiteta svuda ispunjena pod uslovom da se gustina vazduha nigde u polju u toku vremena ne menja. Tamo je dakle (II 1 (1))

(8) $$\frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0$$

5. Diferenciranjem jedn. (3^1) parcijalno po y a druge parcijalno po x i oduzimanjem, kad uzmemo u obzir jednačinu kontinuiteta i promenu parametra f sa geografskom širinom opet zanemarimo, dobijamo

(9) $$\frac{1}{f\varrho^2}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial\varrho}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = -\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt}$$

Prema dobivenoj jednačini bi trebala individualna promena gustine da bude funkcija gustine i gradijenata pritiska i gustine. Na drugoj strani znamo da u saglasnosti sa prvim principom termodinamike

može da dođe do individualne promene gustine iz dva uzroka: zbog menjanja atmosferskog pritiska i zbog dovođenja i odvođenja toplote (V 1 (13)). Pošto ni jedan ni drugi uzrok ne može biti funkcija gradijenta pritiska i gradijenta gustine, tj. geometrijske raspodele pritiska i gustine, to može pod prirodnim uslovima jedn. (9) da bude ispunjena samo pod uslovom da se gustina a time i zapremina vazduha u toku vremena ne menja, da je svuda

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} = 0 \tag{10}$$

Treba napomenuti da individualna promena pritiska u posmatranom slučaju ne može biti funkcija gradijenta pritiska jer se vazduh kreće u pravcu izobara, tako da je

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} \tag{11}$$

Ako uzmemo u obzir da je vektorski proizvod iz horizontalne komponente gradijenta pritiska i horizontalne komponente gradijenta gustine

$$\nabla_h p \times \nabla_h \varrho = (0,\ 0,\ \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \varrho}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \varrho}{\partial x}) \tag{12}$$

u našem slučaju, (9) i (10), jednak nuli, vidimo da su u oblasti geostrofskih vetrova izobare paralelne izosterama. Kretanje se vrši prema tome u pravcu izostera.

6. Iz jedn. (10) i prvog principa termodinamike (V 1 (13)) zaključujemo dalje da može kod tih vetrova dovođenje toplote biti samo funkcija lokalne promene atmosferskog pritiska, (11). Kad uzmemo u obzir zakone zračenja i toplotne provodljivosti, vidimo da je to nemoguće, odn. da se takva kretanja mogu vršiti samo pod uslovom da je svuda u polju

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dQ}{dt} = 0 \tag{13}$$

Iz dobivene jednačine i jedn. (11), (10) i (8), kad uzmemo u obzir još jednačinu gasnog stanja, vidimo da su u oblasti geostrofskih vetrova lokalne kao i individualne promene gustine, pritiska i temperature jednake nuli. Vazduh se kreće adijabatski u stacionarnom polju pritiska stalno jednakom brzinom. Atmosfera je u termodinamičkom pogledu potpuno pasivna i liči na atmosferu koja je u stanju mirovanja. Pošto je u pravcu svake izobare gustina svuda jednaka, to se u saglasnosti sa jedn. (3) pravac vetra i sa visinom ne menja.

7. Podaci u gornjoj tablici govore o tome da su već mali gradijenti pritiska u horizontalnom pravcu u vezi sa jakim vetrovima u atmosferi. To potvrđuju i svakodnevna posmatranja. Iako su takvi gradijenti za dinamiku atmosfere od vrlo velikog značaja, ipak su u poređenju sa vertikalnom komponentom gradijenta pritiska vrlo mali. Pri

$$\varrho = 1 \text{ kg m}^{-3} \quad \text{i} \quad |\nabla_h p| = 1 \text{ mb/100 km}$$

je napr.

$$-\frac{\partial p}{\partial z} : |\nabla_h p| = 10\ 000$$

2. Gradijentni vetar

Slično kao u oblasti ravnih izobara, duvaju u ciklonima i anticiklonima vetrovi približno u pravcu izobara. Kada su takva kretanja kružna i neubrzana govorimo o gradijentnim vetrovima.

Zamislimo da u atmosferi vazduh rotira oko vertikalne z-ose konstantnom brzinom. Tamo duvaju gradijentni vetrovi za koje prema jedn. II 6 (10) važi

$$\ddot{r} = \dot{r} = \ddot{\vartheta} = \dot{z} = \ddot{z} = 0$$

(1)
$$0 = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} + fr\dot{\vartheta} + r\dot{\vartheta}^2$$
$$0 = -\frac{1}{\varrho r}\frac{\partial p}{\partial \vartheta}$$
$$0 = -g - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

U poslednjoj jednačini vertikalna komponenta Coriolis-ove sile nije uzeta u obzir, jer je bila prilikom izvođenja sistema jednačina II 6 (10) u poređenju sa silom teže zanemarena. U oblasti gradijentnih vetrova važi zbog toga jednačina statike samo približno.

Iz jedn. (1^3) zaključujemo da se i ovde kretanje vrši u pravcu izobara i izostera, a i ovde se strujanje vrši u stacionarnom polju pritiska adijabatski. Iz jedn. (1^2) vidimo dalje da je rezultanta iz horizontalnih komponenata gradijentne sile i sile devijacije koje deluju u pravcu poluprečnika putanje (izobare) u ravnoteži sa centrifugalnom silom, tj. sa silom inercije koja se javlja zbog neprestanog menjanja pravca kretanja i koja je uvek usmerena upolje.

U pogledu raspodele atmosferskog pritiska postoje dve mogućnosti: visoki pritisak leži na konkavnoj ($\frac{\partial p}{\partial r} < 0$) ili na konveksnoj strani izobara ($\frac{\partial p}{\partial r} > 0$). Treba proučiti i jedan i drugi slučaj.

Jednačina (1^2) je kvadratna za brzinu gradijentnog vetra

(2)
$$u_{gr} = r\dot{\vartheta}$$

Iz nje dobijamo

(3)
$$u_{gr} = \frac{1}{2}\left(-fr \pm \sqrt{f^2r^2 + 4\frac{r}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}}\right)$$

A. U oblasti visokog atmosferskog pritiska ($\frac{\partial p}{\partial r} < 0$) može da duva gradijentni vetar samo tada kada je

(4)
$$f^2r + \frac{4}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} \geqq 0$$

kada je, drugim rečima, poluprečnik izobare r veći od $-\frac{4}{f^2}\frac{\partial p}{\partial r}$ ili je pak ovoj vrednosti jednak. Pri $\varphi = 45^0$ ($f = 10^{-4}\sec^{-1}$, $\varrho =$

1 kg m^{-3} i $\frac{\partial p}{\partial r}$ = - 1 mb/100 km mogu napr. da duvaju gradijentni vetrovi samo pod uslovom da je

$$r \geq \frac{4}{10^{-8} \cdot 1} \cdot \frac{100}{100\ 000} \text{ m} = 400 \text{ km}$$

Pri dva puta većem (manjem) gradijentu pritiska dobili bismo dva puta veću (manju) vrednost. Poluprečnik r, tj. najmanji mogući poluprečnik izobara u stacionarnom anticiklonu pri datim uslovima sa geografskom širinom se smanjuje, što znači da u blizini ekvatora ne možemo očekivati jake gradijente pritiska u anticiklonima, a to stvarno i jeste.

U oblasti anticiklona ne mogu da postoje veći horizontalni gradijenti atmosferskog pritiska pod uslovom da tamo duvaju samo gradijentni vetrovi. Ali, to još ne znači da anticikloni sa jačim gradijentima ne mogu da postoje. Ako postoje, onda jedn. (1) ne mogu biti ispunjene, već je tada u saglasnosti sa jedn. II 6 (10) $\ddot{r} > 0$. Vazduh izlazi iz anticiklona, gradijent pritiska u horizontalnom pravcu se smanjuje i oblast anticiklona se proširuje.

U oblasti anticiklona je uvek

$$f^2r^2 + 4\frac{r}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} < f^2r^2$$

i zbog toga je u saglasnosti sa jedn. (3)

(5) $\qquad u_{gr} \lessgtr 0 \qquad$ kada je $\qquad f \gtrless 0$

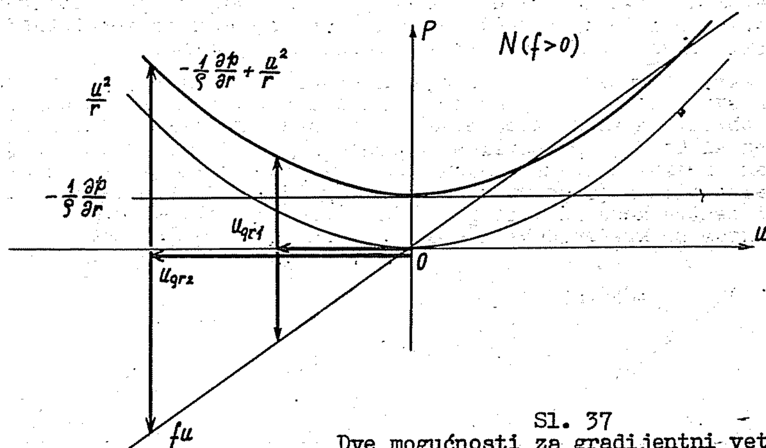
U anticiklonima sa gradijentnim vetrovima prema tome vazduh rotira na severnoj hemisferi u negativnom a na južnoj u pozitivnom smislu. Ovakvo kruženje vazduha zove se anticiklonalno kruženje. Kruženje u suprotnom smislu, tj. u smislu rotacije Zemlje zove se ciklonalno.

Iz jedn. (3) vidimo dalje da postoje najviše dve mogućnosti za brzinu u_{gr}. U svrhu heurističnog tumačenja ove pojave zamislimo da u atmosferi sve brže i brže rotira neki delić vazduha po kružnoj izobari stacionarnog anticiklona. Na početku kada je posmatrani delić bio još u stanju mirovanja deluje na taj delić u radijalnom pravcu samo gradijentna sila upolje. Stavljanjem delića u pokret pojavi se u radijalnom pravcu sila devijacije koja deluje ka centru ako je kruženje anticiklonalno odn. od centra kod ciklonalnog kruženja. Jednovremeno se pojavi i centrifugalna sila koja uvek deluje upolje.

Vidimo da kod ciklonalnog kruženja sve sile deluju upolje i da zbog toga ove sile, tj. gradijentna, Coriolisova i centrifugalna, ne mogu biti međusobno u ravnoteži, u ravnoteži mogu biti samo kod anticiklonalnog kruženja, kada u anticiklonu jedino mogu da postoje gradijentni vetrovi. I u prirodi postoje anticikloni samo sa anticiklonalnim kruženjem vazduha.

Neka posmatrani delić rotira u anticiklonalnom smislu. Sa povećavanjem brzine sila devijacije se povećava linearno, a centrifugalna sila sa kvadratom brzine. Zbog toga se na početku brže povećava sila devijacije nego centrifugalna sila, a kasnije, suprotno tome, centrifugalna sila brže se povećava sa brzinom. Iz slike

37 vidimo da mogu postojati najviše dve brzine u_{gr1} i u_{gr2} kod



Sl. 37
Dve mogućnosti za gradijentni vetar kod anticiklona

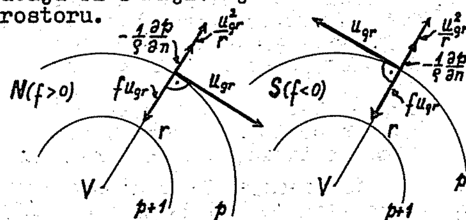
kojih je rezultanta spomenute tri sile jednaka nuli.

Na početku našeg zamišljenog ubrzanog pomeranja delića vazduha po kružnoj izobari anticiklona rezultanta svih sila u pravcu r usmerena je upolje. Sa povećavanjem brzine ta rezultanta se smanjuje i pri brzini u_{gr1} iščezava. Prilikom daljeg povećavanja brzine ova sila na početku deluje prema centru, sve do brzine u_{gr2} kada opet menja smisao delovanja.

Zamislimo sada stacionaran anticiklon gde duvaju gradijentni vetrovi brzinom u_{gr1}. Kada bi se iz makog uzroka brzina vetrova povećala, onda bi ovakvo povećanje imalo za posledicu skretanje vetra prema centru anticiklona, što bi bilo u vezi sa povećavanjem horizontalnog gradijenta pritiska. Suprotno tome bi u anticiklonu sa brzinom u_{gr2} povećavanje brzine imalo za posledicu slabljenje gradijenta i strujanje vazduha po spiralnom putu upolje. U prvom primeru anticiklon dobija na intenzitetu a gubi na prostoru a u drugom gubi na intenzitetu i dobija na prostoru. Slično bi u prvom slučaju smanjivanjem brzine anticiklon gubio na intenzitetu i dobijao na prostoru a u drugom slučaju bi smanjivanjem brzine dobijao na intenzitetu i gubio na prostoru.

Kretanje vazduha u oblasti visokog atmosferskog pritiska sa kružnim izobarama gde duvaju gradijentni vetrovi prikazano je na sl. 38. Prikazane su i sile koje deluju na takav vazduh u horizontalnom pravcu.

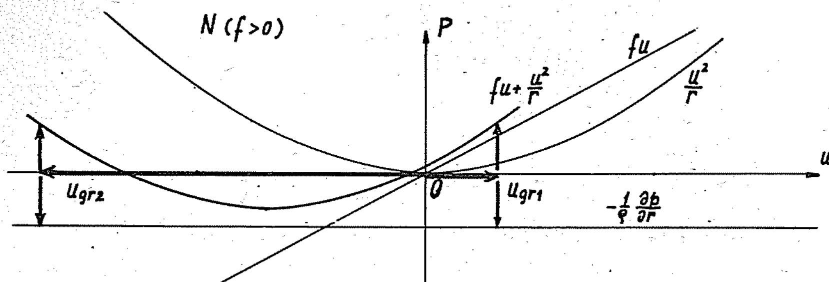
B. U oblasti niskog atmosferskog pritiska ($\frac{\partial p}{\partial r}>0$) postoji teorijski u pogledu brzine u_{gr}



Sl. 38
Raspodela sila pri gradijentnom vetru u anticiklonu

uvek rešenje jedn. (3). Jednačina (3) nam daje uvek dva realna rezultata, dve realne brzine. Jedna je pozitivna, druga negativna. Na severnoj polulopti ($f > 0$) je pozitivna vrednost po apsolutnoj vrednosti manja; na južnoj ($f < 0$) veća od negativne.

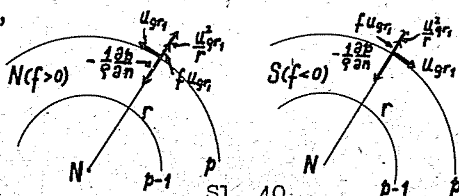
U svrhu tumačenja ovih dveju mogućnosti zamislimo, slično kao pre, da sve brže i brže pomeramo neki delić vazduha po kružnoj izobari oblasti niskog atmosferskog pritiska. Raspored sila prikazuje nam slika 39. Horizontalna komponenta gradijentne sile deluje kod svake brzine u prema centru, tj. u suprotnom smislu kao centrifugalna sila koja je uvek usmerena upolje. Sila devijacije deluje od centra kada se kretanje vrši u ciklonalnom smislu odn. ka centru kada se kretanje vrši u anticiklonalnom smislu.



Sl. 39
Dve mogućnosti za gradijentni vetar kod ciklona

U ciklonima duvaju vetrovi na severnoj hemisferi u pozitivnom a na južnoj u negativnom smislu oko centra (ciklonalno kruženje). To su približno gradijentni vetrovi koji duvaju brzinom u_{gr1} koja je po apsolutnom iznosu manja od brzine u_{gr2}. Takvo strujanje vazduha prikazano je na sl. 40. Vrtlozi manjih dimenzija (pijavice i tornadi) mogu da budu jedne i druge vrste, sa ciklonalnim i anticiklonalnim kruženjem vazduha.

Što veća je brzina vetra u ciklonalnom vrtlogu, to veći je tamo i horizontalni gradijent pritiska prema centru ciklona. Pošto u pogledu vrednosti u_{gr} zbog realnog korena (3) kod ciklona ne postoji nikakvo ograničenje, to u oblasti ciklona možemo očekivati pod povoljnim uslovima i jake gradijente pritiska. Stvarno postoje u prirodi ponekad i cikloni sa vrlo velikim gradijentima pritiska, što kod anticiklona nikada nije slučaj.



Sl. 40
Raspodela sila pri gradijentnom vetru u ciklonu

Iz rešenja (3) vidimo dalje da pri jednakim gradijentima pritiska i inače pod jednakim uslovima u anticiklonima duvaju jači vetrovi nego u ciklonima, ili, jednaki vetrovi su u ciklonima u vezi sa jačim gradijentima nego u anticiklonima. Navodimo sledeći primer:

Pri $r = 500$ km, $f = 10^{-4}$ sec^{-1} ($\varphi = 45^o$), $\rho = 1$ kg m^{-3} je pri $\frac{\partial p}{\partial r} = -1$ mb/100 km (anticiklon) $u_{gr1} = -13,8$ m sec^{-1} i $u_{gr2} = -36,2$ m sec^{-1} a pri $\frac{\partial p}{\partial r} = +1$ mb/100 km (ciklon) je $u_{gr1} = 8,5$ m sec^{-1} i $\bar{u}_{gr2} = -58,5$ m sec^{-1}. Pod inače jednakim uslovima brzina geostrofskog vetra bila bi $u_g = 10$ m sec^{-1}.

U ciklonima i anticiklonima umerenih širina sila devijacije je veća od centrifugalne sile. Na manjim geografskim širinama to uglavnom nije slučaj. U ekvatorijalnim oblastima sila devijacije je vrlo mala ili uopšte ne postoji. Tamo može pri kružnim kretanjima uglavnom gradijentnoj sili da drži ravnotežu samo centrifugalna sila. Pošto centrifugalna sila deluje uvek upolje može u oblasti ekvatora doći do ravnoteže samo u depresijama gde je gradijentna sila usmerena ka unutrašnjosti. Tamo, prema tome, zaokružene oblasti visokog atmosferskog pritiska ne mogu da postoje. Zbog dejstva sila trenja u uskom pojasu između $\varphi = \pm 5^o$ ne mogu da postoje ni zaokružene oblasti niskog atmosferskog pritiska.

Donja tablica nam daje neke vrednosti horizontalne komponente sile devijacije (C_h) i centrifugalne sile (Z) po Exneru

u (m sec^{-1})	$10^4 C_h$ (m sec^{-2}) φ= 10	20	40	60	80°	$10^4 Z$ (m sec^{-2}) r=100	500	1000	2000 km
5	1,3	2,5	4,7	6,3	7,1	2,5	0,5	0,3	0,1
10	2,5	5,0	9,3	12,6	14,3	10	2,0	1,0	0,5
20	5,1	10,0	18,7	25,2	28,6	40	8,0	4,0	2,0
30	7,6	14,9	28,0	37,8	43,0	90	18,0	9,0	4,5
40	10,1	19,9	37,4	50,4	57,3	160	32,0	16,0	8,0

3. Neke opšte osobine graničnih površina

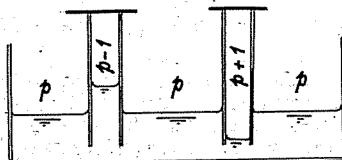
U kotlinama se u toku vedrih noći zbog izračivanja zemljine podloge vazduh hladi. Rashlađene, relativno teške vazdušne mase padaju niz padine i popunjavaju kotline i razna druga udubljenja hladnim vazduhom. U kotlinama je tada uglavnom mirno ili se primećuju samo slabija lokalna strujanja vazduha, a svuda na obroncima duvaju slabiji ili jači padajući vetrovi. Iznad donjeg hladnog vazduha mogu da duvaju najjači vetrovi, mogu, drugim rečima, da postoje najjači gradijenti pritiska u horizontalnom pravcu.

Rashlađeni vazduh graniči se sa gornjim relativno toplim preko više ili manje oštro izražene granične površine, koja leži horizontalno samo u slučaju kada je gornji vazduh u stanju mirovanja. Da je tada, kada gore duva vetar, granična površina nagnuta, možemo da zaključimo na sledeći način:

Rashlađeni vazduh relativno mirno leži. Zbog toga se u njemu praktično ne javljaju gradijentne sile u horizontalnom pravcu. Pošto ovih nema, to se u horizontalnom pravcu i atmosferski pritisak ne menja ili se menja samo malo. Sasvim drukčije je na visinama gde se pritisak u horizontalnom pravcu menja, i to to jače, što jači su tamo vetrovi. Do izjednačenja pritiska u makojoj horizontalnoj ravni u hladnom vazduhu može pod ovim uslovima da dođe očigledno samo na taj način da se debljina hladnog vazduha idući u horizontalnom pravcu prema oblasti niskog pritiska povećava. Ma-

njem pritisku na visini pripada na taj način veći stub donjeg rashlađenog vazduha koji svojom većom težinom kompenzira gornju razliku u pritisku. Granična površina je prema tome nagnuta.

Zamislimo da u sud napunjen vodom stavimo dve cevi otvorene sa obe strane. Ako iznad jedne cevi atmosferski pritisak smanjimo a iznad druge povećamo, pa posle toga cevi na gornjoj strani zatvorimo, onda se u cevi sa smanjenim pritiskom nivo vode nalazi iznad a u cevi sa povećanim pritiskom ispod nivoa vode koja se nalazi sudu van cevi(sl. 41). Možemo da kažemo da ima svako smanjenje pritiska za posledicu uvlačenje vode u oblast gde je pritisak smanjen, a svako povećanje pritiska izbacivanje vode iz oblasti povišenog vazdušnog pritiska.



Sl. 41
Visina površine vode u zavisnosti od vazdušnog pritiska

Slično je u atmosferi. U navedenom primeru rashlađeni vazduh je nagomilan na onom mestu gde je atmosferski pritisak manji i sile pritiska potiskuju iz oblasti visokog atmosferskog pritiska od sebe teške relativno hladne vazdušne mase.

Ovde nas prvo interesuje ugao nagiba granične površine ali ne samo u ovom konkretnom slučaju, već uopšte.

Iz dinamičkog graničnog uslova dobijamo za nagib granične površine u pravcu n prema horizontalnoj ravni (II 7 (4), str. 36)

$$(1) \qquad \frac{dz}{dn} = tg\alpha = -\frac{\frac{\partial p}{\partial n} - \frac{\partial p'}{\partial n}}{\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial p'}{\partial z}}$$

gde su $\frac{\partial p}{\partial n}$ i $\frac{\partial p'}{\partial n}$ horizontalne komponente ascendenta pritiska u horizontalnom pravcu n u donjem hladnom odn. gornjem toplom vazduhu. Vidimo da je granična površina najviše nagnuta prema horizontalnoj ravni u onom pravcu n u kome je razlika $\left|\frac{\partial p}{\partial n} - \frac{\partial p'}{\partial n}\right|$ najveća.

U atmosferi pritisak se smanjuje sa visinom praktično u saglasnosti sa osnovnom jednačinom statike. Zbog toga možemo mesto jedn. (1) sa dovoljnom tačnošću pisati

$$(2) \qquad \frac{dz}{dn} = tg\alpha = \frac{\frac{\partial p}{\partial n} - \frac{\partial p'}{\partial n}}{g(\varrho - \varrho')} = \frac{T_v' T_v}{\gamma_h p} \cdot \frac{\frac{\partial p}{\partial n} - \frac{\partial p'}{\partial n}}{T_v' - T_v}$$

Ovde smo uzeli u obzir da je na graničnoj površini prema jednačini stanja i dinamičkog graničnog uslova $\varrho' T'_v = \varrho T_v$.

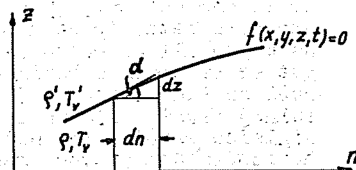
U svrhu daljeg tumačenja pretpostavimo da se n povećava kad idemo od toplog prema hladnom vazduhu (sl. 42). U ovom slučaju je očigledno

$$tg\alpha > 0, \quad (\varrho - \varrho' > 0, \quad T_v' - T_v > 0)$$

i zbog jedn. (2)

$$(3) \qquad \frac{\partial p}{\partial n} - \frac{\partial p'}{\partial n} > 0 \quad ili \quad \frac{\partial p'}{\partial n} < \frac{\partial p}{\partial n}$$

Ovaj uslov je ispunjen ako u oblasti granične površine postoji jedna od



Sl. 42

sledećih raspodela atmosferskog pritiska:

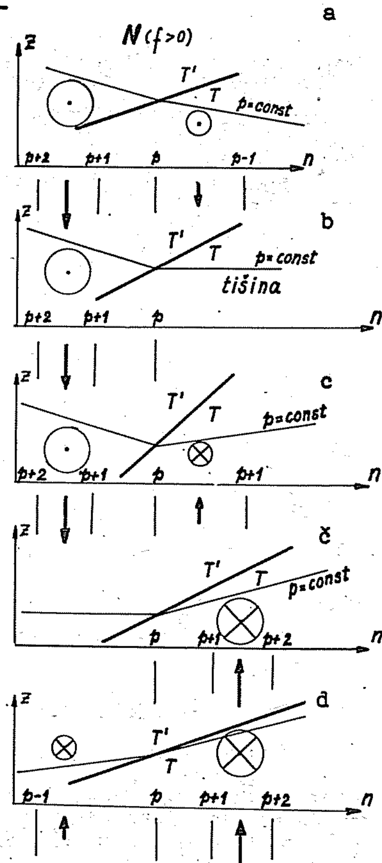
U horizontalnom pravcu u smislu od toplog prema hladnom vazduhu (u pravcu n) pritisak

	u toplom vazduhu	u hladnom vazduhu
a.	opada	slabije opada
b.	opada	ne menja se
c.	opada	raste
d.	se ne menja	raste
e.	raste	brže raste

Postoji dakle pet mogućnosti i one su prikazane na sl. 43, koja sadrži vertikalne preseke kroz granične površine i sinoptičke prikaze polja pritiska u oblasti graničnih površina. Pošto u atmosferi uglavnom duvaju geostrofski i gradijentni vetrovi u pravcu izobara, to su približno prikazana i strujanja vazduha. Jači vetrovi su prikazani većim kružićima odn. strelicama. Kružićima je pretstavljeno strujanje u pravcu normalnom na sliku. Tačkica i krstić u kružiću pretsavljaju strujanje vazduha prema čitaocu odn. od čitaoca.

Iz jedn. (2) vidimo dalje da je nagib granične površine prema horizontalnoj ravni srazmeran razlici između promene pritiska na jedinicu otstojanja u horizontalnom pravcu prema graničnoj površini koja postoji u toplom vazduhu i odgovarajuće promene u hladnom vazduhu. Obrnuto je srazmeran razlici u virtuelnim temperaturama u toplom i hladnom vazduhu u neposrednoj blizini granične površine.

Ako je napr. $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ (hladan vazduh je u stanju mirovanja), $-\frac{\partial p'}{\partial n} = + 1$ mb/100 km, $T = 270^{\circ}$, $T' = 280^{\circ}$ i $p = 1000$ mb, onda je $\mathrm{tg}\,\alpha = 2{,}2:1000$ i $\alpha = 8'$. U ovom primeru treba da idemo 1000 m (100 km) daleko u pravcu n pa da se visina granične površine poveća svega za 2,2 m (220 m). Kad bi bilo $\frac{\partial p}{\partial n} = 1$ mb/100 km bio bi nagib pod inače jednakim uslovima dva puta veći. Vidimo da je pri malo većim razlikama u temperaturi s jedne i druge strane granične površine nagib mali. Ali svejedno možemo na osnovu nagnutosti takvih površina u atmosferi tumačiti najraznovrsnije meteorološke pojave.



Sl. 43
Granična površina u polju pritiska i strujanja

Dok može pri malim razlikama u temperaturi nagib granične površine da bude veliki je nagib izobarskih površina s jedne i druge strane granične površine uvek mali:

Iz diferencijalnih jednačina za izobarske površine u hladnom i toplom vazduhu

(4) $$\frac{\partial p}{\partial n} dn + \frac{\partial p}{\partial z} dz = 0 \quad i \quad \frac{\partial p'}{\partial n} d'n + \frac{\partial p'}{\partial z} d'z = 0$$

(dn, dz i d'n, d'z su elementi puta na izobarskoj površini u hladnom odn. toplom vazduhu u pravcima n i z) dobijamo za nagib jedne i druge izobarske površine

(5) $$tg\beta = -\frac{\partial p}{\partial n} : \frac{\partial p}{\partial z} \quad i \quad tg\beta' = -\frac{\partial p'}{\partial n} : \frac{\partial p'}{\partial z}$$

Pošto se pritisak u atmosferi u horizontalnom pravcu uvek neuporedivo manje menja nego u vertikalnom, to je nagib izobarskih površina uvek mali. Ako uzmemo za horizontalnu komponentu veliku vrednost $\frac{\partial p}{\partial n} = 5$ mb/100 km, onda je pri zemlji ($\frac{\partial p}{\partial z} = -1$ mb/10m) $tg\beta = 5\cdot 10^{-4}$ i $\beta = 1,7'$.

Jednačini (2) možemo da damo drugi oblik koji je za praktičnu primenu zgodniji.

Ako je T_{vm} srednja temperatura između T_v i T_v', tako da je

$$T_v = T_{vm} - \delta T_v \quad i \quad T_v' = T_{vm} + \delta T_v$$

onda možemo sa dovoljnom tačnošću pisati

(6) $$T_v' T_v = T_{vm}^2$$

a jedn. (2) u obliku

(7) $$tg\alpha = a \frac{\frac{\partial p}{\partial n} - \frac{\partial p'}{\partial n}}{T_v' - T_v}$$

gde je

(8) $$a = \frac{T_{vm}^2}{\gamma_h p}$$

Za p = 1000 mb i ako gradijente pritiska izrazimo u mb/100 km je

za T_{vm} =	250	270	290	310°	
100a =	1,8	2,1	2,5	2,8	grad/(mb/100 km)

4. Nagib stacionarnih graničnih površina

Obično se položaj granične površine u prostoru neprestano menja. S njim se menja i oblik granične površine, tako da je u opštem slučaju tgα funkcija koordinata i vremena. Ovde posvetimo našu pažnju stacionarnim graničnim površinama, tj. takvim koje svoj položaj u prostoru u toku vremena ne menjaju i koje očigledno mogu da postoje tada kada s jedne i druge strane duvaju horizontalni geostrofski ili gradijentni vetrovi paralelno sa površinom.

Prvo zamislimo da s jedne i druge strane površine duvaju geostrofski vetrovi u pravcu zapad-istok. Hladan vazduh neka leži na severnoj strani (na severnoj hemisferi). Ako x-osu usmerimo prema istoku, y = n-osu prema severu i z-osu prema zenitu, onda u saglasnosti sa jedn. za nagib granične površine 3 (1) i jedn. za geostrofski vetar 1 (3) možemo da pišemo

(1) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(\rho' u'_g - \rho u_g)}{g(\rho - \rho') + f'(\rho' u'_g - \rho u_g)}$$

(u_g, u_g' = brzina geostrofskog vetra u pravcu zapad-istok u hladnom odn. toplom vazduhu koja je pozitivna kada je vetar zapadni i negativna kada je vetar istočni). Kako može da duva vetar vidi se iz slike 43 (str. 153).

Na ekvatoru gde je f = 0 je α uvek jednako nuli i stacionarne ravne granične površine mogu da leže samo horizontalno. Ugao α iščezava i tada kada je impuls struje hladnog vazduha jednak impulsu struje toplog vazduha. Dalje vidimo da je pri datoj razlici u gustinama ($\rho - \rho'$) nagib najveći kada hladan vazduh struji u vidu jakih istočnih a topli u vidu jakih zapadnih vetrova.

Jedn. (1) možemo pojednostaviti ako uzmemo u obzir da je drugi član u imenitelju, sem pri sasvim malim razlikama u gustini, po apsolutnoj vrednosti mnogo manji od prvog. Na ekvatoru napr. gde je f' najveće ($2 \times 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ sec^{-1}) je pri u_g= 10 m/sec, u_g' = 20 m/sec, T_v = 300° i razlici u gustini kojoj odgovara razlika u virtuelnoj temperaturi $T_v' - T_v$ = 1° drugi član 20 puta manji od prvog. Ako drugi član, koji je posledica dejstva vertikalne komponente Coriolisove sile, zanemarimo i gustine zamenimo sa virtuelnim temperaturama dobijamo <u>Margules-ov obrazac za nagib granične površine</u>

(2) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f}{g}\,\frac{T_v u_g' - T_v' u_g}{T_v' - T_v}$$

koji važi za makoju orijentaciju ose n.

Pošto važi identitet

(3) $$T_v u_g' - T_v' u_g = \frac{T_v' + T_v}{2}(u_g' - u_g) + \frac{u_g' + u_g}{2}(T_v - T_v')$$

u kome možemo drugi član u poređenju sa prvim zanemariti, to mesto jedn. (2) možemo obično sa dovoljnom tačnošću da upotrebljavamo jednačinu

(4) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f\,T_{vm}}{g}\,\frac{u_g' - u_g}{T_v' - T_v}$$

Ako merimo brzinu vetra u m sec^{-1}, onda u oblasti geografske širine φ = 45° približno važi

(5) $$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}003\frac{u_g' - u_g}{T_v' - T_v}$$

U kom smislu duvaju vetrovi u oblasti ravne stacionarne granične površine pokazuje nam slika 43 (str. 153) iz koje vidimo da važi i sledeće pravilo:

Ako se krećemo zajedno sa vazduhom, onda se na severnoj hemisferi vazduh sa druge strane granične površine kreće za nas z desna na levo.

Neka sada hladna i topla vazdušna masa neubrzano rotiraju jedna pored druge oko zajedničke vertikalne ose rotacije u vidu gradijentnih vetrova. Visina granične površine koja deli te dve mase se najviše povećava ili smanjuje kada idemo u pravcu radijalno od ose simetrije upolje, tj. u pravcu r ranije izabranog cilindričnog koordinatnog sistema. U ovakvoj oblasti stacionarnih vetrova je nagib takve stacionarne granične površine prema 3 (2)

$$(6) \qquad tg\alpha = \frac{\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial p'}{\partial r}}{g(\rho - \rho')}$$

(vertikalna komponenta sile devijacije nije uzeta u obzir).

Ako gradijent pritiska u pravcu r izrazimo pomoću brzine gradijentnih vetrova u_{gr} i u_{gr}' koji duvaju u hladnom odn. toplom vazduhu, onda dobijamo u saglasnosti sa jedn. 2 (1) i 2 (2) za nagib posmatrane kružne granične površine

$$(7) \qquad tg\alpha = \frac{f}{g}\,\frac{\rho u_{gr} - \rho' u_{gr}'}{(\rho - \rho')} + \frac{1}{rg}\,\frac{\rho u_{gr}^2 - \rho' u_{gr}'^2}{(\rho - \rho')}$$

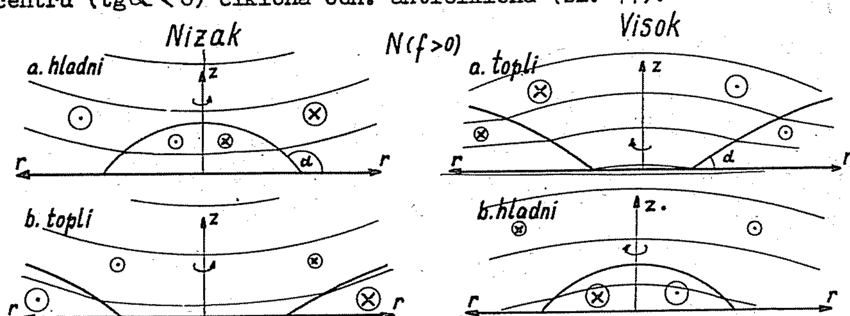
odn. kad zamenimo gustinu sa virtuelnom temperaturom

$$(8) \qquad tg\alpha = \frac{f}{g}\,\frac{T_v' u_{gr} - T_v u_{gr}'}{T_v' - T_v} + \frac{1}{rg}\,\frac{T_v' u_{gr}^2 - T_v u_{gr}'^2}{T_v' - T_v}$$

ili približno

$$(9) \qquad tg\alpha = \frac{f\,T_{vm}}{g}\,\frac{u_{gr} - u_{gr}'}{T_v' - T_v}\left(1 + \frac{u_{gr} + u_{gr}'}{fr}\right)$$

Brzina su pozitivne kod kruženja u pozitivnom smislu. I u ciklonu i u anticiklonu može biti tgα jednog i drugog znaka. Hladan vazduh može, drugim rečima da se nalazi na periferiji ($tg\alpha > 0$) ili u centru ($tg\alpha < 0$) ciklona odn. anticiklona (sl. 44).



Sl. 44
Razne mogućnosti kružnih graničnih površina

Za tumačenje je podesna jedn. (8). U njoj je prvi član isti

kao kod ravnih izobara. Drugi član se sastoji iz dva dela, od kojih jedan je po svojoj suštini pozitivan a drugi negativan. Pozitivni deo je posledica dejstva centrifugalne sile $\bar{u}_{gr}^2 : r$ koja se javlja u hladnom vazduhu i deluje u smislu izbacivanja hladnog vazduha iz centralne oblasti vrtloga. Kada se hladan vazduh nalazi u centru ($tg\alpha < 0$) je zbog ovog efekta taj vazduh više spljošten nego što bi inače bio, a kada se nalazi na periferiji ($tg\alpha > 0$) granična površina leži strmije nego što bi ležala inače. U suprotnom smislu deluje deo koji je posledica centrifugalne sile $\bar{u}_{gr}'^2 : r$ koja se javlja u toplom vazduhu i zbog koje je tamo gradijent pritiska ako je usmeren prema centru (u ciklonu) veći i ako je usmeren upolje (u anticiklonu) manji nego što bi inače bio. Time je kod ciklona pojačana moć usisavanja, a kod anticiklona oslabljena moć izbacivanja hladnog vazduha.

Koliki je drugi član u jedn. (8) u poređenju sa prvim daje nam sa dovoljnom tačnošću vrednost $(\bar{u}_{gr} + \bar{u}_{gr}') : fr$. Ako je napr. $\bar{u}_{gr} = 20$ m sec^{-1}, $\bar{u}_{gr}' = 10$ m sec^{-1}, $r = 100$ km i $f = 10^{-4}$ sec^{-1}, onda je drugi član od prvog tri puta veći. Razlike mogu da budu u ciklonima još mnogo veće.

5. Izgled stacionarnih graničnih površina u atmosferi

Granične površine imaju u atmosferi najraznovrsnije oblike.

Ovde nas interesuje oblik stacionarnih površina u najjednostavnijem slučaju da one pretstavljaju granice između dve susedne mase vazduha u kojima paralelno sa površinom, u pravcu x, struje horizontalni geostrofski vetrovi, a u svakoj masi temperatura se menja samo sa visinom i to linearno.

Na visini z je temperatura pod ovim uslovima u jednoj i drugoj masi

(1) $$T = T_o - \gamma z \qquad \text{odn.} \qquad T' = T_o' - \gamma' z$$

(T_o, T_o' = temperatura pri tlu, na visini $z = 0$, u jednoj odn. drugoj masi, γ, γ' = odgovarajući vertikalni temperaturni gradijenti). U pravcu normalnom na strujnice visina z granične površine promeni se na jedinicu otstojanja za

(2) $$\frac{dz}{dy} = \frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p'}{\partial y}}{g(\rho - \rho')} = \frac{TT'}{\gamma_h p}\,\frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p'}{\partial y}}{T' - T} = \frac{f}{g}\,\frac{Tu_g' - T'u_g}{T' - T}$$

Jednačina (2) je diferencijalna jednačina za funkciju z u kojoj je horizontalna koordinata y nezavisna promenljiva. Tražimo njeno rešenje pod jednostavnim uslovima.

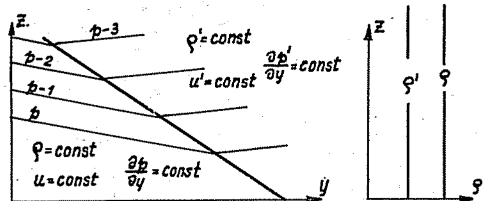
a. Granična površina između dva homogena sloja (ρ = const, ρ' = const) sa konstantnim horizontalnim gradijentima pritiska $-\frac{\partial p}{\partial y}$ i $-\frac{\partial p'}{\partial y}$. Takva atmosfera svakako može da postoji, kao što vidimo iz barometarske visinske formule za homogenu atmosferu. Iz jedn. (2) proizlazi da je u tom slučaju

(3) $$\frac{dz}{dy} = \text{const}$$

da je dakle granična površina ravna (sl. 45). Kao što vidimo iz jedn. 1 (3) su u jednoj kao i drugoj masi vetrovi svuda jednaki.

b. Granična površina između dva izotermna sloja. Svaki sloj neka se kreće svuda jednakom brzinom.

Iz jedn. (2) odmah proizlazi da je i u ovom slučaju granična površina ravna (sl. 46).

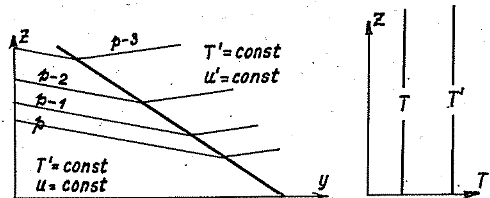


Sl. 45. Izgled granične površine između dva homogena sloja

c. Granična površina između dva politropna sloja ($\gamma \neq 0$, $\gamma' \neq 0$).

Neka bude $T_o < T_o'$ i $\gamma < \gamma'$. U tom slučaju je vazdušna masa u kojoj je temperatura pri tlu (pri $z = 0$) T_o' ispod visine

$$(4) \quad z_e = \frac{T_o' - T_o}{\gamma' - \gamma}$$

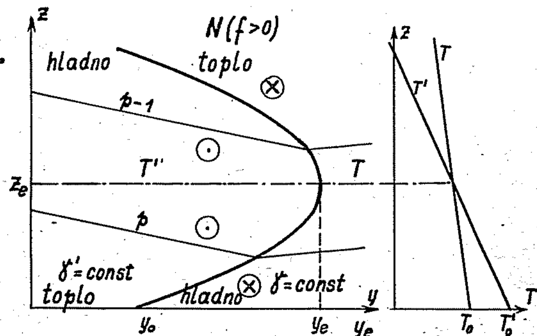


Sl. 46 Izgled granične površine između dva izotermna sloja

toplija od susedne mase, a iznad ove visine hladnija (sl. 47). Do visine z_e sa povećavanjem visine temperaturska razlika između jedne i druge vazdušne mase se smanjuje a od te visine se povećava. Ako pretpostavimo da u jednoj kao i u drugoj vazdušnoj masi vetrovi svuda duvaju približno jednakom brzinom i to tako da je na nekojoj visini

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p'}{\partial y} > 0$$

onda se u vezi s tim nagib granične površine u saglasnosti sa jedn. (2) do visine z_e povećava i poveća do maksimuma ($\alpha = 90^o$) a od te visine naviše postaje opet sve manji.



Sl. 47 Izgled granične površine između dva politropna sloja

U svakom slučaju se u atmosferi veličina $TT' : \gamma_h p$ iz jedn. (2) ne menja mnogo sa visinom. Ako smatramo da se u posmatranom slučaju i razlika u gradijentima ne menja mnogo sa visinom, onda možemo smatrati sa većom ili manjom tačnošću da je veličina

(5) $$n = \frac{TT'}{\gamma h p}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p'}{\partial y}\right)$$

konstantna. Pod ovim uslovima možemo jedn. (2) jednostavno integraliti. Integral ove jednačine

(6) $$(z - z_e)^2 + 2n \frac{y - y_o}{\gamma' - \gamma} - z_e^2 = 0$$

daje nam očigledno visinu z granične površine kao funkciju koordinate y (y_o = y za z = 0).

Vertikalni presek posmatrane granične površine u ravni y-z je parabola koja ima svoje teme na visini $z = z_e$ i seče zemljino tle na otstojanju

(7) $$y_e - y_o = \frac{z_e^2 (\gamma' - \gamma)}{2n}$$

Ako uzmemo u obzir jedn. (4), (5), 3 (6) i 3 (8) možemo i pisati

(8) $$y_e - y_o = \frac{z_e (T_o' - T_o)}{2a\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p'}{\partial y}\right)}$$

Navodimo još jedan primer. Za $T_o' - T_o = 5^o$, $\gamma' = 1{,}0^oC/100$ m, $\gamma = 0{,}6^oC/100$ m, $\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial p'}{\partial y} = 1$ mb/100 km, p = 1000 mb i TT' = 290^2, (tablica na str. 154) je

$$z_e = 1250 \text{ m} \qquad i \qquad y_e - y_o = 63 \text{ km}$$

Pod kojim uslovima i dali uopšte može u atmosferi vazdušna masa jedne vrste na prikazani način da ulazi u vazdušnu masu druge vrste, to je pitanje na koje nam ova izlaganja ne daju odgovor. Ovde je samo prikazano da bi pod datim uslovima granična površina bila neka cilindrična površina sa paraboličnim presekom i generatrisom u pravcu ose x. Kakve sve mogućnosti postoje u atmosferi videćemo u drugom delu ovog udžbenika.

IX. TRENJE I TURBULENCIJA

1. Sile spoljašnjeg trenja

U atmosferi se vazduh iznad 500 do 1000 m debelog prizemnog sloja vazduha kreće uglavnom u pravcu izobara. Tamo duvaju uglavnom geostrofski i gradijentni vetrovi u pravcu izobara. Drukčije je sa prizemnim vazduhom koji se zbog sila trenja i turbulencije kreće prema oblasti niskog atmosferskog pritiska.

Sile spoljašnjeg trenja, tj. sile trenja o zemljino tle, deluju u pravcu kretanja vazduha a u suprotnom smislu i to potpuno slično kao prilikom kretanja čvrstog tela po podlozi. Poznato je da je intenzitet R_{sm} sile trenja $\vec{R}_{sm}$ o podlogu srazmeran masi m tela i brzini kretanja u i da ne zavisi od dodirne površine tela o podlogu. Ako uzmemo još u obzir da sila spoljašnjeg trenja deluje u suprotnom smislu vektora brzine, onda vidimo da je

(1) $$\vec{R}_{sm} = -k_s m\vec{u}$$

gde je k_s faktor proporcionalnosti i zove se koeficijenat spoljašnjeg trenja ili kratko spoljašnje trenje.

Ako za sada sile efektivnog trenja (str. 40) ne uzmemo u obzir, onda na svaki delić prizemnog vazduha u kretanju deluju u relativnom koordinatnom sistemu koji sa Zemljom rotira sledeće sile: sila zemljine teže, gradijentna sila, Coriolisova sila i sila trenja o zemljino tle. Za horizontalna strujanja vazduha dobijamo prema tome mesto jedn.II 6 (8) sledeće jednačine koje su prvi napisali Guldberg i Mohn (1877)

(2) $$\begin{aligned} \dot{u} &= -\alpha\frac{\partial p}{\partial x} + f v - k_s u \\ \dot{v} &= -\alpha\frac{\partial p}{\partial y} - f u - k_s v \\ 0 &= -g - \alpha\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

Vidimo da i u oblasti gde se strujanje vazduha vrši horizontalno pod dejstvom spoljašnjeg trenja važi osnovna jednačina statike. Prve dve jednačine možemo napisati u vidu sledeće vektorske jednačine (II 6 (9) i VIII 1 (4)):

(2') $$\dot{\vec{u}} = -\alpha\nabla_h p - f\vec{k}\times\vec{u} - k_s\vec{u}$$

Množenjem ove jednačine skalarno vektorom brzine $\vec{u}$ dobijamo

(3) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{2}\right) = -\alpha\frac{\partial p}{\partial s}u - k_s u^2$$

($-\frac{\partial p}{\partial s}$ = komponenta gradijenta pritiska u pravcu i smislu delovanja vektora brzine $\vec{u}$).

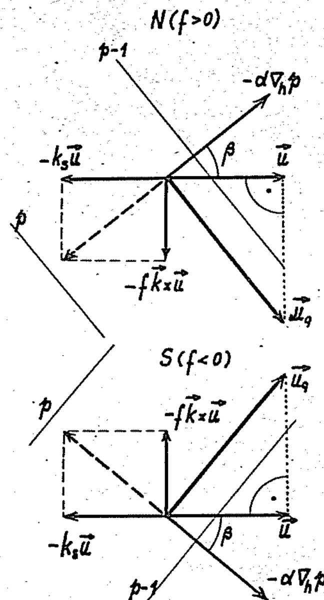
Prilikom horizontalnog kretanja prizemnog vazduha može se prema tome kinetička energija vazduha ($u^2:2$), a time i brzina, da menja i zbog delovanja gradijentne sile ($-\alpha\frac{\partial p}{\partial s}$) i zbog spoljašnjeg trenja.

Pošto je poslednji član u jedn. (3) koji se odnosi na trenje po svojoj suštini negativan, to vidimo da spoljašnje trenje uvek deluje u smislu smanjivanja kinetičke energije

Kod pravolinijskog i neubrzanog strujanja gde je $\dot{u} = 0$, a prema tome i $\frac{d}{dt}(\frac{u^2}{2}) = 0$, je u saglasnosti sa jedn. (3)

$$k_s u = -\alpha\frac{\partial p}{\partial s} \tag{4}$$

Kretanje se vrši tada u parvcu opadanja atmosferskog pritiska i sila trenja je u ravnoteži sa komponentom gradijentne sile u pravcu kretanja. Ako sada sebi grafički pretstavimo jednačinu (2') vidimo da se pri zemlji pravolinijsko neubrzano kretanje vrši ovako: (sl. 48): Kada nam vetar duva u leđa nizak vazdušni pritisak leži na našoj levoj strani ispred odn. na našoj desnoj strani ispred ako smo na južnoj hemisferi. Kod pravolinijskih neubrzanih prizemnih horizontalnih vetrova rezultanta iz horizontalne komponente Coriolisove sile, spoljašnjeg trenja i horizontalne komponente gradijentne sile jednaka je nuli.



Sl. 48
Raspodela sila pri neubrzanom pravolinijskom kretanju vazduha pod dejstvom spoljašnjeg trenja

Ugao β koji gradi vektor brzine sa horizontalnim gradijentom pritiska u slučaju horizotalnih pravolinijskih i neubrzanih strujanja prizemnog vazduha zove se prema Guldbergu i Mohnu normalni ugao skretanja. Kao što vidimo iz slike 48, ovaj ugao je manji od 90° i poznavajući njega možemo lako izračunati koeficijenat spoljašnjeg trenja k_s.

Ako koordinatni sistem orijentišemo ovako da se vazduh kreće u pravcu x- ose, onda se u slučaju pravolinijskih neubrzanih strujanja prve dve jednačine sistema (2) redukuju na sledeće

$$\begin{aligned} 0 &= -\alpha\frac{\partial p}{\partial x} - k_s u \\ 0 &= -\alpha\frac{\partial p}{\partial y} - fu \end{aligned} \tag{5}$$

Deljenjem prve jednačine sa drugom dobijamo

$$k_s = f\frac{\partial p}{\partial x} : \frac{\partial p}{\partial y} = f \operatorname{ctg}\beta \tag{6}$$

Iz jedn. (5) dobijamo dalje odmah da je

$$u\sqrt{f^2 + k_s^2} = \alpha|\nabla_h p| \tag{7}$$

Ako uzmemo još u obzir da je $-\frac{\partial p}{\partial y} = |\nabla_h p| \sin\beta$, onda vidimo da je (5)

(8) $$u = u_g \sin\beta$$

gde je $u_g = \frac{\alpha}{f}|\nabla_h p|$ brzina geostrofskog vetra koji bi na onom mestu u otsustvu sila trenja, a inače pod jednakim uslovima, duvao.

Poznavanjem normalnog ugla skretanja β lako izračunamo pomoću jedn. (6) koeficijenat spoljašnjeg trenja. Koliko je β za razne oblasti, daju nam vremenske karte. Tablica sadrži neke na taj način određene vrednosti β i k_s (Hann-Süring, Lehrbuch der Meteorologie, 5 izd., str. 605). Brojevi pretstavljaju srednje vrednosti.

Oblast	Fili-pini	Bengal. zaliv	USA	Atlant. Okean	Nor-veška	Sev. Amerika	Morska obala	Kopno	Pasati
geogr. širina	14,6	20,8	45	56,3	61	37,5	51	51°	
β =	27,8	32,8	49,9	59,9	56,5	42,2	77,2	61,0°	
$10^4 k_s$ =	0,69	0,80	0,87	0,70	0,84	0,80	0,26	0,63	0,2 sec^{-1}

Trenje je na kopnu otprilike 4 puta veće nego na moru. Svakako je spoljašnje trenje k_s iznad jednake podloge svuda jednako i u saglasnosti sa jedn. (6) normalni ugao skretanja β sa geografskom širinom se povećava. Na srednjim geografskim širinama je na kopnu oko 50° a na moru oko 80°.

Na osnovu posmatranja je poznato, što je prvi Cl. Ley (1877) konstatovao, da jednakim gradijentima atmosferskog pritiska leti odgovaraju jači prizemni vetrovi i veći uglovi skretanja nego zimi. Još upadljivije su ove razlike između dana i noći. Ovo je posledica turbulencije koja je leti i danju veća nego zimi i noću. Zbog ove pojave dolaze sile spoljašnjeg trenja zimi i noću do jačeg dejstva u poređenju sa silama efektivnog unutrašnjeg trenja nego leti i danju.

Spoljašnje trenje može se odrediti i jednačinom (4). Ali, na taj način određena vrednost ne slaže se sa onom iz jedn. (6), koja se određuje na osnovu drugih osmotrenih podataka. Ovo neslaganje je posledica zanemarivanja turbulencije vazduha, na što je već Sprung ukazao (1885) i kasnije (1910) na osnovu obrade sinóptičkih karata Sandström pokazao.

2. Uticaj spoljašnjeg trenja i turbulencije na kretanje prizemnog vazduha

Iznad prizemnog sloja vazduha debljine 500 do 1000 m duvaju uglavnom geostrofski i gradijentni vetrovi. Zbog spoljašnjeg trenja su vetrovi pri tlu obično slabiji tako da se u prizemnom sloju brzina vetra po pravilu sa visinom povećava. Turbulencijom vrši se prenos impulsa na jednoj strani sa zemljine podloge u više slojeve atmosfere, a na drugoj strani od viših slojeva ka zemljinoj podlozi. Možemo kazati da gornji vazduh koji se brže kreće prosto vuče donji vazduh, tako da govorimo o vučnim silama koje su posledica turbulencije.

Posmatrajmo opet atmosferu u kojoj na visini duvaju geostrofski vetrovi. Zbog trenja o zemljino tle vazduh se pri tlu

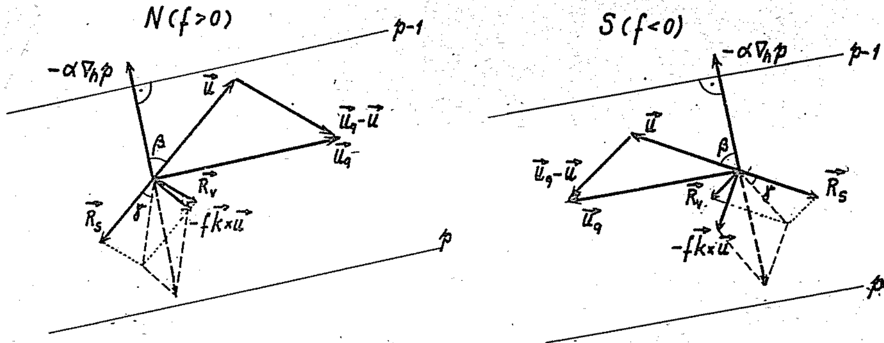
kreće prema oblasti niskog atmosferskog pritiska i to manjom brzinom nego na visini gde je i pravac strujanja obično drugi, jer se vazduh kreće u pravcu izobara. Ako je vektor brzine gornjeg geostrofskog vetra $\vec{u}_g$ a vektor brzine prizemnog vazduha $\vec{u}$, onda se gornji vazduh u odnosu na donji kreće brzinom

(1) $$\vec{u}_r = \vec{u}_g - \vec{u}$$

I baš u pravcu i smislu ove relativne brzine deluje pri zemlji na svaki delić vazduha jedinice mase vučna sila $\vec{R}_v$. Možemo pretpostaviti da je ona srazmerna intenzitetu tog relativnog vetra, da je dakle

(2) $$\vec{R}_v = k_1(\vec{u}_g - \vec{u})$$

gde je k_1 srazmernosni faktor. Kada je kretanje pravolinijsko i neubrzano, deluju na taj način u horizontalnoj ravni sile u smislu slike 49 . Pošto je kretanje neubrzano, rezultanta ovih sila je-



Sl. 49
Raspodela sila pri neubrzanom pravolinijskom kretanju vazduha pod dejstvom spoljašnjeg trenja i vučne sile

dnaka je nuli. Rezultanta iz sile spoljašnjeg trenja $\vec{R}_s$ i sile unutrašnjeg trenja $\vec{R}_v$ je ukupna sila trenja $\vec{R}$ i ona deluje desno unazad odn. na južnoj hemisferi levo unazad od vektora brzine $\vec{u}$.

Pomoću sinoptičkih vremenskih karata možemo odrediti vektore $-\nabla_h p$, $\vec{u}$ i $-f\,\vec{k}\times\vec{u}$ a prema slici 49 ugao β. Možemo pretpostaviti da je intenzitet vektora $\vec{R}$ približno srazmeran brzini u i ako pišemo

(3) $$R = k\,u$$

(k = koeficijenat proporcionalnosti), dobijamo u saglasnosti sa slikom 49

(4) $$\alpha\,|\nabla_h p|\cos\beta = k\,u\cos\gamma \quad \text{i} \quad \alpha\,|\nabla_h p|\sin\beta = fu + k\,u\sin\gamma$$

gde je γ ugao koji gradi vektor ukupne sile trenja sa vektorom spoljašnjeg trenja. Odavde dobijamo odmah

(5) $$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\beta - \frac{\varrho f u}{|\nabla_h p| \cos\beta}$$

i

(6) $$k^2 = \frac{\alpha^2}{\dot{u}^2}|\nabla_h p|^2 + f^2 - \frac{2 f \alpha |\nabla_h p|}{u} \sin\beta$$

Hesselberg i Sverdrup su pomoću ovih formula a na osnovu podataka iz sinoptičkih karata našli za Severnu Ameriku srednje vrednosti

$$k = 2{,}16 \cdot 10^{-4} \sec^{-1} \quad \text{i} \quad \gamma = 22{,}0^{\circ}$$

Za Evropu su našli Baur i Philipps srednje vrednosti

$$k = 1{,}82 \cdot 10^{-4} \sec^{-1} \quad \text{i} \quad \gamma = 35^{\circ}$$

Ukupnu silu trenja $\vec{R}$ možemo rastaviti u dve komponente: jednu u pravcu vektora brzine ($-\, ku \cos\gamma$) i drugu u pravcu Coriolisove sile ($+\, ku \sin\gamma$). Prema tome za prizemna horizontalna strujanja mesto jedn. 1 (2) važe sledeće hidrodinamičke jednačine kretanja

(7) $$\dot{u} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda v - cu$$
$$\dot{v} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial y} - \lambda u - cv$$
$$0 = -g - \alpha\frac{\partial p}{\partial z}$$

gde je

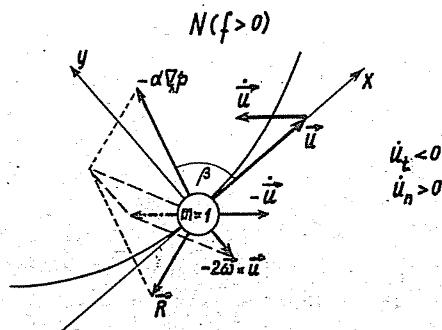
(8) $$\lambda = f + k \sin\gamma \quad \text{i} \quad c = k \cos\gamma$$

Ako usmerimo x-osu, kao ranije, u pravcu u kome se trenutno vazduh kreće (sl. 50) tako da je $v = 0$, onda je

$$\dot{u} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial x} - cu$$
$$\dot{v} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial y} - \lambda u$$

odn.

(9) $$\alpha|\nabla_h p| \cos\beta = ku \cos\gamma + \dot{u}$$
$$\alpha|\nabla_h p| \sin\beta = fu + ku \sin\gamma + \dot{v}$$



Sl. 50
Strujanje vazduha prikazano u prirodnom koordinatnom sistemu

Pomoću ovih jednačina, a na osnovu izmerenih podataka, možemo odrediti k i γ za makoja stacionarna i nestacionarna horizontalna prizemna strujanja vazduha. Ako konačno tangencijalno i normalno ubrzanje pišemo u obliku

$$\dot{u} = \dot{u}_t \quad \text{i} \quad \dot{v} = \dot{u}_n$$

onda možemo prema Hesselbergu (1914) u saglasnosti sa jednom i drugom jednačinom pisati

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f + k\sin\gamma + \frac{\mathring{u}_n}{u}}{k\cos\gamma + \frac{\mathring{u}_t}{u}} \qquad (10)$$

Vidimo da ugao skretanja β zavisi od raznih faktora, među ostalim od ubrzanja. Kada se pravac kretanja menja, javljaju se uvek više ili manje jaka ubrzanja u normalnom pravcu. Kod ciklonalnog kruženja je uvek $\mathring{u}_n : u > 0$, a kod anticiklonalnog strujanja ova vrednost je uvek manja od nule (sl. 50). U saglasnosti sa jedn. (10) su zbog toga u ciklonima uglovi skretanja veći nego u anticiklonima. Ovo potvrđuju i posmatranja.

Ako zamislimo da se neki ciklon kreće npr. u pravcu zapad-istok i da je spoljašnje trenje svuda približno jednako, onda je brzina kretanja vazduha u raznim sektorima ciklona različita. Brzina vetra je naime u svakoj tačci jednaka zbiru iz brzine kretanja ciklona i brzine kojom vazduh rotira oko centra. Tako su u našem primeru vetrovi najjači u južnom, a najslabiji u severnom kvadrantu. Vidimo da u putujućem ciklonu postoje zbog toga i tangencijalna ubrzanja što u većoj i manjoj meri utiče na ugao skretanja.

Koliki je ugao skretanja u raznim sektorima ciklona (u proseku) daje nam tablica koja je uzeta iz gore pomenutog udžbenika Hann-Süringa.

SREDNJE VREDNOSTI UGLA SKRETANJA

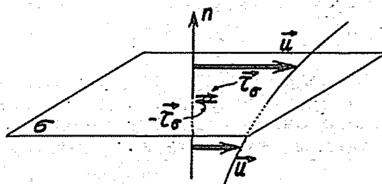
SEKTOR	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	SREDNJI
Sev. Atlantik	76	71'	74	81	79	90	90	79	80
Zap. i Sev. Evropa	63	59'	61	61	67	70	72	76	68
Srednja Evropa	34	43	45	48	56	51	40	33'	44

Unutrašnje trenje neprestano se menja u toku dana. Ovo menjanje utiče i na pravac i brzinu vetra pri tlu o čemu biće više govora u drugom delu ovog udžbenika.

3. Jednostavne jednačine kretanja za vazduh sa unutrašnjim trenjem

Uticaj sila trenja na strujanje vazduha je za tumačenje raznih meteoroloških pojava od osnovnog značaja. Ovde nas interesuje jednačina koju možemo upotrebiti za proučavanje polja strujanja u turbulentnom vazduhu pod jednostavnim uslovima.

Zamislimo neku površinu σ koja leži u pravcu strujanja vazduha (sl. 51). Možemo pretpostaviti da vazduh s jedne strane te površine deluje na susedni vazduh s druge strane površine nekom tangencijalnom površinskom silom unutrašnjeg trenja τ_σ. Ova sile deluje u pravcu kretanja vazduha i to u smislu koji zavisi od toga da li se vazduh s druge strane kreće brže ili sporije nego vazduh sa ove strane (sl. 51). Prema Newtonu možemo pretpostaviti da je ova sila smicanja srazmerna površini σ



Sl. 51 Tangencijalna površinska sila unutrašnjeg trenja

i promeni $\frac{\partial \vec{u}}{\partial n}$ brzine u na jedinicu otstojanja u normalnom pravcu n na površinu. Ako mislimo da nam $\vec{\tau}_{\sigma}$ pretstavlja silu kojom vazduh pretstavljen na sl. 51 ispod površine σ deluje na gornji vazduh (gde su vrednosti n veće), onda je očigledno

(1) $$\vec{\tau}_{\sigma\, n} = -\mu\sigma\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \qquad [\mu] = [kg\ m^{-1} sec^{-1}]$$

(μ = srazmernosni faktor). Vrednost μ zavisi od raznih faktora, od turbulentnosti atmosfere. Srazmerno jednostavno određuje se na osnovu podataka o menjanju vetra sa visinom ($\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$) kao što ćemo da vidimo kasnije. Na taj način dobivene vrednosti su više desetina i sto hilijada puta veće od laboratorijskih. U laboratoriji pronađene vrednosti posledica su prenošenja impulsa u homogenom gasu od molekula na molekul, a u atmosferi od delića vazduha većih razmera na delić. Atmosfera je uvek više ili manje nehomogena, na jednom mestu je vazduh nešto više zagrejan nego malo dalje, tu sadrži nešto više vlage nego tamo itd. Zbog toga uslovi kretanja nisu svuda jednaki i u atmosferi postoje razna relativna kretanja u odnosu na osnovno kretanje čitave mase kao celine.

Laboratorijska vrednost μ zove se <u>koeficijenat unutrašnjeg trenja</u> ili kratko <u>unutrašnje trenje</u>. Vrednost koja se odnosi na atmosferu zove se <u>koeficijenat virtuelnog (efektivnog) unutrašnjeg trenja</u> ili kratko <u>virtuelno (efektivno) unutrašnje trenje</u>.

Prema kinetičkoj teoriji gasova koeficijenat unutrašnjeg trenja ne zavisi od pritiska. On se, suprotno kao kod većine tečnosti, sa temperaturom povećava. Za suvi vazduh je pri t=0 i 20°C laboratorijska vrednost $\mu = 1{,}7$ odn. $1{,}8 \cdot 10^{-4}\ g\ cm^{-1} sec^{-1}$.

Posmatrajmo sada u atmosferi turbulentan sloj vazduha koji se kreće u horizontalnom pravcu. U saglasnosti sa jedn. (1) deluje na donju horizontalnu površinu delića vazduha, koji se nalazi u tom sloju kao elementarni delić vazduha sa ivicama dx, dy, dz, donji vazduh u pravcu horizontalne x-ose silom smicanja $-\mu\frac{\partial u}{\partial z}dx\,dy$. Slično deluje na gornju površinu u tom istom pravcu i smislu gornji vazduh silom smicanja $+\left[\mu\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}(\mu\frac{\partial u}{\partial z})dz\right]dx\,dy$. Ako pretpostavimo da se u horizontalnom pravcu brzina vetra ne menja, onda vidimo da u pozitivnom smislu ose x deluje unutrašnje trenje na posmatrani elementarni delić vazduha zapremine $dV = dx\,dy\,dz$ silom koja je jednaka zbiru gore navedenih sila, tj. silom

$$\frac{\partial}{\partial z}(\mu\frac{\partial u}{\partial z})\, dV$$

Analognom silom deluje okolna atmosfera još u pravcu y-ose, tako da je sila efektivnog unutrašnjeg trenja koja deluje na delić vazduha mase m = 1 (zapremine α), a kreće se u atmosferi sa horizontalnim vetrovima koji se mogu menjati samo sa visinom

(2) $$\vec{P} = \alpha\left[\frac{\partial}{\partial z}(\mu\frac{\partial u}{\partial z}),\ \frac{\partial}{\partial z}(\mu\frac{\partial v}{\partial z}),\ 0\right]$$

Često možemo smatrati da se efektivno unutrašnje trenje sa visinom ne menja. U tom specijalnom slučaju je

(3) $$\vec{P} = \alpha\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, 0\right)$$

što znači da za horizontalna strujanja vazduha sa efektivnim unutrašnjim trenjem, gde se vektor brzine u horizontalnom pravcu ne menja, Eulerove hidrodinamičke jednačine kretanja glase

(4) $$\begin{aligned} \dot{u} &= -\alpha\frac{\partial p}{\partial x} + fv + \alpha\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \dot{v} &= -\alpha\frac{\partial p}{\partial y} - fu + \alpha\mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \rho &= -\alpha\frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned}$$

4. Uticaj trenja na menjanje vetra sa visinom

Spoljašnje trenje i turbulencija u velikoj meri utiču na raspodelu vetra u atmosferi i verovatno je čak pojava mlazne struje u velikoj meri posledica efektivnog unutrašnjeg trenja. Ovde nas interesuje menjanje vetra sa visinom u prizemnom sloju vazduha atmosfere gde se pored turbulencije oseća i uticaj trenja o zemljino tle.

Taj prizemni sloj možemo podeliti uglavnom u dva dela, u donji gde se koeficijenat efektivnog unutrašnjeg trenja sa visinom vrlo brzo menja i na gornji gde možemo približno smatrati ovu vrednost konstantnom (srednje vrednosti). Donji sloj se prostire iznad ravne podloge od zemljinog tla otprilike do visine anemografa. Od visine 0,1 m do visine 15 m iznad ravne podloge efektivno unutrašnje trenje poveća se oko 50 puta i više. Gornji sloj prostire se do visine trenja ili kao što se još kaže do visine geostrofskog vetra, koja kod nas iznad ravne podloge leži oko 1000 m visoko iznad tla.

U donjem sloju vetar se menja sa visinom slično kao brzina tečnosti sa turbulentnim strujanjem u cevi idući od zida cevi u unutrašnjost. Svakako se ovde radi o srednjim vrednostima. Na toj osnovi i na osnovi brojnih vrednosti merenja vetra u prizemnom sloju Stevensona (1888), G.I. Taylor je napisao (1915) sledeći obrazac za raspodelu vetra u donjem sloju:

(1) $$v = 109\, z^{\frac{1}{7}}$$

(v u cm sec^{-1}, visina z u cm). Sutton je pokazao (1932) da konstante koje se javljaju u jedn. (1) treba da budu pod raznim uslovima zamenjene drugim vrednostima. Mesto broja 7 u eksponentu treba za letnji period staviti broj koji se kreće nekako u granicama između 6 (noću) i 14 (danju), a zimi između 8 (noću) i 12 (danju).

Jedn. 3 (4) pružaju nam mogućnost za proučavanje menjanja vetra sa visinom u gornjem delu prizemnog sloja i to onog menjanja koje je posledica trenja. Ovde nas ne interesuje pitanje kako menjanje gradijenta pritiska sa visinom utiče na vetar. O tome biće reči kasnije.

U svrhu jednostavnog integralenja jedn. 3 (4) ograničimo se na posmatranje stacionarnih horizontalnih pravolinijskih strujanja u oblasti gde su gustina vazduha i gradijent pritiska svuda jednaki i gde se brzina vetra u horizontalnom pravcu nigde ne menja.

Množenjem druge jedn. 3 (4) sa imaginarnom jedinicom $i = \sqrt{-1}$ i sabiranjem prve i druge jednačine, kad uzmemo u obzir da je u posmatranom slučaju

(2) $$\dot{u} = \dot{v} = 0$$

dobijamo

(3) $$\alpha\mu \frac{d^2U}{dz^2} = \alpha G + ifU$$

gde je

(4) $$U = u + iv \quad i \quad G = \frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial p}{\partial y}$$

Mesto oznake za parcijalni upotrebili smo oznaku za totalni izvod po visini z, jer je U samo funkcija visine z. Ako smatramo f pozitivnim (severna hemisfera) i zbog kraćeg pisanja postavimo

(5) $$A^2 = \frac{f}{2\alpha\mu} \quad i \quad B = \frac{G}{\mu}$$

a imaginarnu jedinicu pišemo u obliku $i = (1 + i)^2 : 2$, onda jedn. (3) dobija jednostavniji oblik

(6) $$\frac{d^2U}{dz^2} - (1 + i)^2A^2U - B = 0$$

Ovo je obična linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima i možemo je odmah integraliti. Pošto je jedan partikularan integral očigledno $\frac{iB}{2A^2}$ to opšti integral te jednačine glasi

(7) $$U = c_1e^{(1+i)Az} + c_2e^{-(1+i)Az} + \frac{iB}{2A^2}$$

gde su c_1 i c_2 integracione konstante koje zavise od graničnih uslova.

Pod pretpostavkom da su i na velikim visinama brzine konačne možemo pri $A > 0$ postaviti da je $c_1 = 0$. Ako drugu konstantu pišemo u obliku

$$c_2 = u_{ro}e^{i\beta_o}$$

što očigledno ne znači nikakvo ograničenje, onda nam jedn. (7) daje

$$U = u_{ro}e^{-(1+i)Az + i\beta_o} + \frac{iB}{2A^2}$$

odn. zbog jedn. (4) i (5)

$$u + iv = u_{ro}e^{-Az}\left[\cos(\beta_o - Az) + i\sin(\beta_o - Az)\right] + \frac{i\alpha}{f}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial p}{\partial y}\right)$$

Izjednačenjem realne komponente na levoj strani sa realnom komponentom

na desnoj strani i istim postupkom sa imaginarnom komponentom dobijamo odavde

$$u = u_{ro}\, e^{-Az} \cos(\beta_o - Az) - \frac{\alpha}{f}\frac{\partial p}{\partial y}$$

(8)

$$v = u_{ro}\, e^{-Az} \sin(\beta_o - Az) + \frac{\alpha}{f}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Ako sada y-osu orijentišemo u pravcu gradijenta pritiska i uzmemou obzir da na visini z = 0 (napr. visina anemografa) vazduh struji poznatom brzinom $\vec{u}_o$ prema oblasti niskog atmosferskog pritiska, onda na osnovu tih podataka i iz jedn. (8) lako odredimo konstante u_{ro} i β_o. Za z = 0 dobijamo

(9) $u = u_o = u_g + u_{ro}\cos\beta_o$ i $v = v_o = u_{ro}\sin\beta_o$

gde je

(10) $$u_g = -\frac{\alpha}{f}\frac{\partial p}{\partial y} > 0$$

brzina vetra na velikoj visini (pri $z = \infty$) koji u vidu geostrofskih vetrova duva u pravcu x-ose.

Pošto je, kao što vidimo iz jedn. (9),

$$u_{ro}^2 = (u_o - u_g)^2 + v_o^2 \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\gamma_o = \frac{v_o}{u_g - u_o}$$

gde je

(11) $$\gamma_o = \pi - \beta_o$$

to vidimo da možemo konstantu u_{ro} tumačiti kao intenzitet vektora

$$\vec{u}_{ro} = (u_o - u_g,\ v_o,\ 0)$$

tj. vektora koji pretstavlja relativnu brzinu kojom struji vazduh na visini z = 0 u odnosu na geostrofski vetar i koji sa pozitivnom (negativnom) x-osom zaklapa ugao β_o (γ_o) (sl. 52).

Ako sada u rešenju (8) uzmemo u obzir jedn. (10) i (11), dobijamo rešenje jedn. 3 (4) pod datim uslovima u obliku

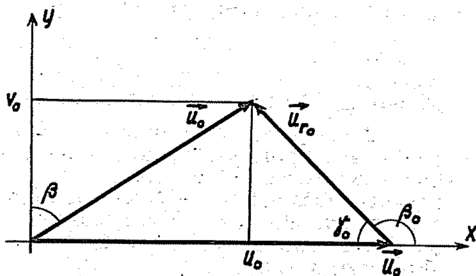
$$u = u_g - u_{ro} e^{-Az} \cos\gamma$$

(12)

$$v = u_{ro} e^{-Az} \sin\gamma$$

gde je

(13) $$\gamma = Az + \gamma_o$$



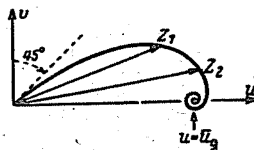
Sl. 52

Iz jedn. (12) dobijamo još za relativnu brzinu kojom struji vazduh na visini z u odnosu na geostrofski vetar:

(14) $$u_r = \sqrt{(u - u_g)^2 + v^2} = u_{ro}\, e^{-Az}$$

Sa visinom intenzitet relativne brzine $\vec{u}_r$ eksponencijalno opada, a ugao koji taj vektor gradi sa vektorom $-\vec{u}_g$ linearno se povećava. Menjanje vetra sa visinom zbog trenja možemo sebi dakle pretstaviti logaritamskom spiralom koja je prikazana na sl. 53.

Potpuno slično se zbog efektivnog unutrašnjeg trenja i u moru vektor brzine vode menja sa dubinom. Ovo je teorijski prvi pokazao Ekman (1902) i po njemu se ovakva spirala zove Ekmanova spirala.



Sl. 53
Ekmanova spirala

Na visinama gde je $\gamma = \pi, 2\pi, \ldots$ je vektor brzine $\vec{u}$ usmeren u pravcu x-ose. Prva od ovih visina je prema jedn. (13) i (5)

$$z_t = \frac{\pi - \gamma_0}{A} = (\pi - \gamma_0)\sqrt{\frac{2\alpha\mu}{f}} \tag{15}$$

odn. iznad zemljinog tla na visini $h_t = h_o + z_t$ gde je h_o visina anemometra (gde je $\vec{u} = \vec{u}_o$). Ova visina se zove visina trenja (visina geostrofskog vetra). Donji sloj vazduha u atmosferi debljine h_t zove se sloj ili zona trenja. U tom sloju vetar sa visinom skreće na severnoj hemisferi u desno a na južnoj ulevo. Visina trenja zavisi od koeficijenta efektivnog unutrašnjeg trenja, tj. prvenstveno od stabilnosti atmosfere, i geografske širine. Na ekvatoru je $z_t = \infty$.

Poznavavanjem visine trenja možemo lako odrediti koeficijenat unutrašnjeg trenja. Iz jedn. (15) dobijamo naime

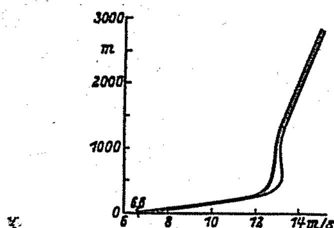
$$\mu = \frac{z_t^2}{(\pi - \gamma_0)^2}\frac{\omega}{\alpha}\sin\varphi \tag{16}$$

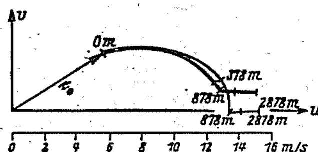
Na umerenim širinama visina trenja kreće se nekako u granicama između 500 i 1000 m. Pošto najniži sloj u kome se javljaju i sile spoljašnjeg trenja (zbog zgrada, drveća itd) obično nije deblji od najviše nekoliko 10 m, to je približno $h_t = z_t$. Ako je $\gamma_0 = 40^0 = 40\frac{\pi}{180}$, $z_t = 50\,000$ cm, $\varrho = 0{,}001$ g cm^{-3}, $\varphi = 45^0$ ($f = 10^{-4}$ sec^{-1}), onda je $\mu = 20$ g cm^{-1} sec^{-1}. Efektivno unutrašnje trenje je u ovom primeru više nego 100 000 puta veće od molekularnog.

U sloju trenja vetar se na početku brzo menja sa visinom, a posle sve sporije. Vetar na svim visinama duva prema oblasti niskog atmosferskog pritiska. Za razliku od toga u susednom sloju, između visina gde je $\gamma = \pi$ i 2π duvaju protivgradijentni vetrovi, tj. vetrovi sa jednom komponentom prema oblasti visokog atmosferskog pritiska. Tamo se vetrovi već vrlo malo razlikuju od geostrofskog vetra (10).

Iz gornjeg izvođenja vidimo dalje da bismo došli do jednakog rezultata i pod pretpostavkom da se komponenta gradijenta pritiska u horizontalnom pravcu linearno menja sa visinom, da se prema tome i odgovarajuće komponente gradijentnog vetra u_g linearno menjaju sa visinom. U ovom slučaju bila bi vrednost $iB:(2A^2)$ linearna

funkcija visine pa prema tome opet jedan partikularan integral jednačine (6). Uzimajući ovo u obzir, Th. Hesselberg i H. U. Sverdrup došli su do rezultata koji se sa osmatranjima odlično podudaraju. Ovo nam prikazuju slike 54 i 55 koje se odnose na menjanje pravca i brzine vetra sa visinom iznad visine anemografa.



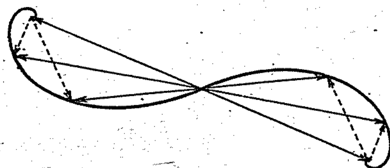


Sl. 54
Menjanje pravca vetra
iznad Lindenberga

Sl. 55
Menjanje brzine vetra
iznad Lindenberga

Stvarno stanje dobiveno na osnovu 99 posmatranja u atmosferi iznad Lindenberga, nemačke aerološke opservatorije blizu Berlina, pretstavljeno je debelo izvučenim linijama ($u_o = 6,6$ m sec^{-1}, $\beta = 56^o$). Tanke linije pretstavljaju teorijske vrednosti.

Neka se sada visina z = 0 nalazi na ravnoj stacionarnoj graničnoj (frontalnoj) površini koja leži koso, napr. ovako da je njen presek sa horizontalnom površinom prava linija koja leži u pravcu zapad-istok. Gore neka duvaju zapadni, a dole istočni vetrovi (severna hemisfera), što je u saglasnosti sa Margulesovim dinamičkim graničnim uslovom samo pod uslovom da je istočna struja hladnija od zapadne (str. 155). Neka bude zbog jednostavnosti unutrašnje trenje svuda jednako i na dovoljnom otstojanju od granične površine neka ... bude geostrofski vetar u hladnom vazduhu jednako jak kao u toplom. Na samoj graničnoj površini je $u_o = v_o = 0$ i promena vetra sa visinom je u toplom vazduhu slična kao što je prikazana na sl. 53, U ovom slučaju je $\gamma_o = 0$, $u_{ro} = u_g$ i za $z \rightarrow 0$ dobijamo iz jedn. (12) i (13) da je $tg\beta = u_o : v_o = 1$, tako da je $\beta = 45^o$. Potpuno slično se menja vektor brzine u hladnom vazduhu sa dubinom, tako da je tačka z = 0 tačka simetrije ove duple spirale (sl. 56). U donjem vazduhu vetar skreće sa visinom ulevo dok u gornjem udesno. Vidimo da gornji topli vazduh zbog trenja struji prema onim oblastima gde je debljina hladnog vazduha veća, u našem slučaju prema severu, a donji na suprotnu stranu. Trenje prema tome utiče u smislu smanjivanja nagiba granične površine, tj. u



Sl. 56 Menjanje vetra sa visinom
u oblasti granične površine

smislu uvlačenja hladnog vazduha ispod toplog. Drugim rečima možemo reći da trenje deluje u smislu pojačavanja nizlaznih odn. slabljenja uzlaznih strujanja u hladnoj vazdušnoj masi. Slično deluje u smislu pojačavanja uzlaznog odn. slabljenja nizlaznog strujanja u toploj vazdušnoj masi. Koliko je jak ovaj uticaj na razvoj vremena je predmet proučavanja drugog dela ovog udžbenika.

5. Trenje i transport mase prema oblasti niskog pritiska

Zbog sila trenja pri zemlji vazduh obično struji prema oblasti niskog atmosferskog pritiska. Zbog toga u ciklonu postoji transport mase vazduha prema centralnim oblastima donjeg dela ciklona. Slično iz centralnog dela anticiklona zbog trenja vazduh pri zemlji odlazi na sve strane. Zajedno sa transportom vazdušnih masa vrši se transport vodene pare, raznih vrsta energije itd, tako da stojimo pred važnim pitanjem koliki može da bude transport mase vazduha prema oblasti niskog atmosferskog pritiska zbog sila trenja.

Zamislimo da su u nekoj oblasti ispunjeni uslovi iz prethodnog odeljka, da dakle tamo u stacionarnom polju pritiska, gde je gradijent pritiska svuda jednak, duvaju stacionarni vetrovi koji se menjaju samo sa visinom. U takvoj oblasti postoji, u saglasnosti sa jedn. 4 (12) i 4 (13), kroz vertikalni pravougaonik sa osnovicom 1 u pravcu izobara i visinom $z_2 - z_1$ transport mase vazduha

(1)
$$\emptyset_{z_2 - z_1} = \int_{z_1}^{z_2} \varrho u_{ro} e^{-Az} \sin (Az + \gamma_o) \, dz = - \frac{\bar{\varrho} u_{ro}}{2A} e^{-Az} \left[\sin (Az + \gamma_o) + \cos (Az + \gamma_o) \right] \Bigg|_{z_1}^{z_2}$$

($\bar{\varrho}$ = srednja gustina)

Ako se ovde ograničimo na slučaj da je $z_1 = 0$, gde neka bude $\gamma_o = u_o = v_o = 0$, $u_{ro} = u_g$ (str. 171), onda se po jedinici puta duž izobare u jedinici vremena u sloju trenja ($z_2 = z_t$) vrši transport vazduha prema oblasti niskog atmosferskog pritiska (4(15))

(2)
$$\emptyset_{z_t} = \frac{\bar{\varrho} u_g z_t}{2\pi} (1 + e^{-\pi})$$

Pod uslovom da je $\bar{\varrho} = 1{,}2$ kg/m^3, $u_g = 10$ m sec^{-1} i $z_t = 1000$ m je $\emptyset_{z_t} = 1000$ kg/m sec.

Iz primera vidimo da trenje posreduje jake transporte vazdušnih masa a time i drugih veličina. Od naročitog značaja za razvoj vremena je transport vodene pare koji bi bio u navedenom primeru, kad bi bila srednja specifična vlažnost q = 10 gr/kg, ukupno 10·1000 gr/m sec = 36 tona po času. Kada tako velike mase vodene pare ulaze u oblasti niskog atmosferskog pritiska, onda je razumljivo zašto se tamo stvaraju oblaci i često najjače padavine.

6. Razmena vazdušnih masa

Koeficijenat efektivnog unutrašnjeg trenja ima mnogo šire značenje nego što smo to do sada videli.

Zamislimo da se vazduh kao celina kreće u horizontalnom pravcu. Zbog turbulencije je kretanje ovakvog vazduha "neuređeno" i delićima vazduha raznih dimenzija se pravac i brzina kretanja neprestano menjaju. Ovu činjenicu potvrđuju i registracije vetra koje pokazuju da se na makom mestu u atmosferi pravac i brzina vetra neprestano menjaju. Na taj način kroz makoju horizontalnu površinu, koja se nalaži u posmatranoj vazdušnoj masi, prolaze razni delići vazduha u jednom i drugom pravcu, tj. odozdo naviše i odozgo naniže. Pri tome oni nose sobom razne osobine vazduha, kao što su to specifična vlažnost, količina kretanja, količina prašine u vazduhu itd. U opštem slučaju transport ovih veličina iz donjeg dela atmosfere u gornji nije jednak jednovremenom transportu u suprotnom pravcu.

Za tumačenje najraznovrsnijih meteoroloških pojava je od posebnog značaja poznavanje koliki može da bude u pojedinim uslovima takav transport u vertikalnom pravcu pa i u drugim pravcima. To je prvi ustanovio G. J. Taylor (London 1914) a kasnije nezavisno od njega pokazao W. Schmidt (Beč 1917).

Neka je s specifična vrednost neke veličine kvantiteta S (to je veličine, kao što su napr. razne vrste energije, koja je sfazmerna masi tela - str. 44). Zamislimo da u dovoljno dugačkom intervalu vremena vremena δt kroz horizontalnu površinu σ koja se nalazi na nekoj određenoj stalnoj visini z prolazi odozdo naviše n delića vazduha. U posmatranom intervalu vremena δt svi ti delići prenose kroz površinu σ naviše ukupno

$$\sum_{i=1}^{n} m_i s_i$$

osobine čije specifična vrednost je s (m_i, s_i = masa odn. specifična vrednost veličine S i-tog delića vazduha).

Možemo pretpostaviti da se za vreme našeg posmatranja vrednosti s_i ne menjaju i da su one jednake početnim vrednostima koje su delići imali kada su se nalazili na početnim visinama sa kojih su došli. Pošto se kretanje vrši u polju zemljine teže a da bi bila ova naša pretpostavka zadovoljena, treba od našeg daljeg posmatranja isključiti sve one veličine koje prilikom vertikalnih premeštanja zbog dejstva sile teže ne ostaju konstantne. Takve su veličine napr. unutrašnja energija i enthalpija koje su funkcije temperature, a temperatura se prilikom vertikalnih premeštanja menja. Pretpostavljamo da se veličina s u horizont. pravcu ne menja.

Gledano sa druge strane, možemo kazati da je veličina s u posmatranom intervalu vremena uvek neka određena funkcija visine z, tako da je na visini $z + h_i$ (h_i = relativna visina sa koje je došao i-ti delić, $h_i < 0$) vrednost ove funkcije

$$s(z+h_i) = s(z) + h_i s'(z) + \frac{h_i^2}{2} s''(z) + \ldots$$

odn. sa tačnoćću koja nas zadovoljava

$$s_i = s + h_i s' + \frac{h_i^2}{2} s''$$

($s' = \frac{\partial s}{\partial z}$, $s'' = \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$ su prva odn. druga geometrijska promena veličine s sa visinom, uzeta na visini z). Kad uzmemo ovo u obzir dobijamo za ukupni transport kroz posmatranu površinu u posmatranom intervalu vremena izvršen odozdo naviše

$$\sum_{i=1}^{n} m_i s_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (s + h_i s' + \frac{h_i^2}{2} s'') \qquad h_i < 0$$

Slično dobijamo za jednovremeni transport veličine S kroz istu površinu nadole

$$\sum_{k=1}^{N} m_k s_k = \sum_{k=1}^{N} m_k (s + h_k s' + \frac{h_k^2}{2} s'') \qquad h_k > 0$$

gde se zbir odnosi na svih N delića koji za to vreme dolaze odozgo sa relativnih visina h_k. Kad oduzmemo donju vrednost od gornje dobijamo za ukupni transport ove osobine naviše izvršen kroz površinu σ u intervalu vremena δt

$$S_{\uparrow\sigma,\delta t} = (\sum_1^n m_i - \sum_1^N m_k) s - (-\sum_1^n h_i m_i + \sum_1^N h_k m_k) s' + (\sum_1^n \frac{h_i^2}{2} m_i - \sum_1^N \frac{h_k^2}{2} m_k) s''$$

Ako je interval vremena dovoljno veliki, prvi član na drugoj strani zbog zakona o održanju mase iščezava. I treći član možemo izjednačiti sa nulom, pošto pretpostavljamo da se na sličan način vrši kretanje delića nagore kao nadole. To svakako ne možemo pretpostaviti u blizini graničnih površina. Kad ovo uzmemo u obzir, dobijamo za ukupan transport naviše osobine s kroz jedinicu površine u jedinici vremena

(1) $$S_\uparrow = - K \frac{\partial s}{\partial z}$$ $\frac{M}{K} = -\frac{dM}{dz}$

gde je

(2) $$K = \frac{1}{\sigma \delta t} (\sum_1^N m_k h_k - \sum_1^n m_i h_i) \qquad [K] = [kg\, m^{-1} sec^{-1}]$$

<u>koeficijenat razmene</u> ili kratko <u>razmena</u>. Pošto je $h_k > 0$ i $h_i < 0$, to je ova vrednost uvek pozitivna. Ona od veličine s ne zavisi.

Kada je $\frac{\partial s}{\partial z} \gtrless 0$ je transport usmeren naniže odn. naviše. On je srazmeran razmeni K i intenzitetu vertikalne komponente gradijenta veličine s. Time smo došli do jednostavnog obrasca za razna izračunavanja, za proučavanja transporta toplote, vodene pare itd. u atmosferi.

Transport $S_\uparrow$ obično se sa visinom menja. Na mestu gde se sa visinom menja, menja se u toku vremena i s.

Ako je na visini z transport naviše $S_\uparrow = - K \frac{\partial s}{\partial z}$, onda je na visini z + dz jednovremeni transport naviše

$$S_\uparrow + dS_\uparrow = - \left[K \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} (K \frac{\partial s}{\partial z})\, dz \right]$$

Prema tome ulazi sa donje strane u prostor koji se nalazi između visina z i z + dz i iznad jedinice površine u jedinici vremena za

$$S_{\uparrow} - (S_{\uparrow} + dS_{\uparrow}) = \frac{\partial}{\partial z}(K\frac{\partial s}{\partial z})dz$$

više od ove osobine nego što je jednovremeno izlazi kroz gornju granicu ovog prostora. Jer se jednovremeno specifična veličina s na onom mestu promeni za $\frac{\partial s}{\partial t}$ to u tom prostoru i u toj jedinici vremena ukupna promena veličine čije specifična vrednost je s iznosi $1 \cdot \rho \frac{\partial s}{\partial t} dz$. Izjednačenjem jedne i druge vrednosti dobijamo za promenu veličine s u toku vremena

$$(3) \qquad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(K\frac{\partial s}{\partial z})$$

Često možemo pretpostaviti da se razmena K sa visinom ne menja. U takvom slučaju se jedn. (3) svodi na sledeću

$$(4) \qquad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{K}{\rho}\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \qquad (\text{za } \frac{\partial K}{\partial z} = 0)$$

Time smo dobili jednačinu koja je po obliku jednaka jednačini za toplotnu provodljivost u jednom pravcu (str. 124) i jednačini koju smo dobili prilikom proučavanja uticaja dugotalasnog zračenja na temperaturu vazduha (str. 122).

Ako sada za s uzmemo specifičnu količinu kretanja u pravcu x i u pravcu y, tj. u i v, onda je

$$(5) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Na levoj strani ovih jednačina imamo komponente lokalnog ubrzanja. Pošto ovde druge uticaje na kretanje vazduha nismo uzeli u obzir, time smo dobili jednačine kretanja za turbulentan vazduh, i to za naš specijalni slučaj gde lokalne promene u horizontalnom pravcu veličina u i v ne postoje.(str. 167). Odavde zaključujemo da je K identično koeficijentu efektivnog unutrašnjeg trenja.

7. Primena obrazaca za razmenu

Primena dobivenih jednačina u prethodnom odeljku je svestrana.

Pomoću jedn. 6 (5) možemo napr. da proučavamo koliki je uticaj turbulencije na temperaturu vazduha.

Kod adijabatskih kretanja potencijalna temperatura se ne menja. Zbog toga možemo u gornjim jednačinama mesto s pisati "specifičnu potencijalnu enthalpiju" ili "specifičnu potencijalnu unutrašnju energiju" $c_p\Theta$ odn. $c_v\Theta$. Ako uzmemo u obzir da je za p/ t = 0,, što ovde i pretpostavljamo, u saglasnosti sa definicijom potencijalne temperature

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\Theta}{T}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{\Theta}{T}(\gamma_a + \frac{\partial T}{\partial z})$$

onda možemo u saglasnosti sa jedn. 6 (4), ako pri tome promene ko-

ličnika Θ:T sa visinom ne uzmemo u obzir, pisati

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\varrho}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad (1)$$

Dobili smo jednačinu koja po svemu potseća na jednačinu za toplotnu provodljivost i na jednačinu koju smo dobili prilikom proučavanja uticaja dugotalasnog zračenja na temperaturu vazduha (str. 124 i 122).

Ako uzmemo i ovde jednake granične uslove kao ranije, prilikom proučavanja prenošenja toplote u zemljinom tlu (VI-6), ako dakle pretpostavimo da se temperatura na velikoj visini u toku vremena ne menja i da je temperatura prizemnog sloja vazduha koji je u dodiru sa zemljinim tlom

$$T_o = T_s + A_o \cos\frac{2\pi}{t_1} t \qquad (2)$$

onda je rešenje jedn. (1)

$$T = T_s + A_o e^{-z\sqrt{\frac{\pi\varrho}{Kt_1}}} \cos\left(\frac{2\pi}{t_1} t - z\sqrt{\frac{\pi\varrho}{Kt_1}}\right) \qquad (3)$$

Pod pretpostavkom da nema drugih uticaja i da se turbulencija u toku dana ne menja, onda vidimo da se temperatura prizemnog sloja vazduha u toku dana potpuno slično menja kao u zemlji. Mesto sa dubinom ovde faza sa visinom zaostaje, a dužina vertikalnog talasa, t.j. jednog vala koji se pojavi u vremenu t_1, je (str. 126)

$$\ell = 2\sqrt{\frac{\pi t_1 K}{\varrho}} \qquad (4)$$

Za $K = \mu = 5$ kg m^{-1} sec^{-1} (str. 170), $\varrho = 1$ kg m^{-3} i $t_1 = 24^h = 24 \cdot 3600$ sec bilo bi napr. $\ell = 2330$ m. Za zemljino tle je ℓ približno 1 m. Ako je $A_o = 10^o$, onda je na visini $z = \ell/2 = 1165$ m amplituda $A = 10:23 = 0,5^o$. (str. 126).

Zaostajanje faze sa visinom, kao što nam daje ovo posmatranje, ne slaže se dobro sa stvarnim stanjem u prirodi, što znači da uticaj zračenja ne smemo zanemariti. Dalje biće diskusije o tom problemu u drugom delu udžbenika.

U atmosferi pritisak vodene pare obično opada sa visinom. U saglasnosti sa skraćenom Süringovom formulom (str. 67) je u proseku na visini z pritisak vodene pare

$$e = e_o 10^{-\frac{z}{6}} \qquad (\text{z u km}) \qquad (5)$$

Kad uzmemo u obzir difercijalnu jedn. za specifičnu vlažnost III 10 (13) (str. 62), osnovnu jednačinu statike i jednačinu za specifičnu vlažnost III 10 (4), dobijamo odavde sa dovoljnom tačnošću

$$\frac{\partial q}{\partial z} = -0,622\frac{e}{p}\left(\frac{1}{6000\,M} - \frac{\gamma_h}{T}\right) m^{-1} \qquad (\text{z u m}) \qquad (6)$$

Ako uzmemo kao srednje vrednosti pri tlu $p = p_o = 1000$ mb, $e = e_o = 10$ mb i $T = T_o = 283^o$, onda je

(7) $$\frac{\partial q}{\partial z} = - 1{,}6\cdot 10^{-6}\ m^{-1}$$

Vidimo da se specifična vlažnost u proseku sa visinom smanjuje. U atmosferi postoji zbog toga zbog turbulencije u proseku transport vodene pare naviše. Vodena para se u atmosferi kondenzuje i kondenzovana voda se na raznim mestima u vidu padavina vraća na zemljino tle. Ako uzmemo kao srednju godišnju sumu padavina na svetu 350 mm = 350 kg/m^2 i smatramo da je ova količina jednaka godišnjem transportu vodene pare sa tla u atmosferu, onda pomoću jedn. (7) i 6 (1) dobijamo za srednji koeficijenat razmene

$$K = 7\,kg\,m^{-1} sec^{-1}$$

Lako možemo konačno još pronaći jednačinu pomoću koje izračunavamo vertikalnu struju toplote (enthalpije) zbog turbulencije.

Ukupni transport enthalpije kroz pre posmatranu horizontalnu površinu σ u dovoljno dugačkom intervalu vremena δt od dole nagore je $\sum_{i=1}^{n} m_i c_p T_i$ gde je, za razliku od pre, T_i temperatura koju ima i-ti delić na visini z gde se nalazi površina σ. Ako smatramo da je atmosferski pritisak na visini z jednak ili približno jednak 1000 mb, onda je temperatura T_i jednaka odn. praktično jednaka potencijalnoj temperaturi Θ_i na visini h_i. Ako uzmemo u obzir da je Θ_i konzervativna veličina, onda vidimo da je u saglasnosti sa ranijim izvođenjima (str. 173, 174) vertikalni transport toplotne energije (enthalpije) zbog turbulencije

(8) $$Q_t = - K\, c_p \frac{\partial \Theta}{\partial z} = - K\, c_p\, (\gamma_a - \gamma)$$

U podadijabatskoj atmosferi postoji prema tome transport toplotne energije naniže, u nadadijabatskoj naviše, a u adijabatskoj atmosferi nema transporta toplotne energije u vertikalnom pravcu. U toku vedrih mirnih noći je napr. u prizemnom sloju vazduha γ malo. Ukoliko postoji K je tada zbog turbulencije toplotna struja usmerena naniže. Suprotno tome je u takvim danima u prepodnevnim časovima $\gamma > \gamma_a$ i zbog turbulencije vrši se prenos toplote u više slojeve atmosfere.

Ako je napr. $K = 5\ kg\,m^{-1}\,sec^{-1}$ i $\gamma = 0{,}6^{o}C/100m$ je

$$- Q_t = 17{,}3\ kcal/m^2 čas = 415\ kcal/m^2 dan$$

X. LOKALNE PROMENE ATMOSFERSKOG PRITISKA

1. Opšta jednačina tendencije

Na makom mestu u atmosferi atmosferski pritisak se u toku dana neprestano menja. Menja se zbog raznih vazdušnih struja koje transportuju vazduh sa jednog mesta na drugo. Ovaj transport ima za posledicu na jednoj strani menjanje mase, tj. ukupne težine vazdušnih masa iznad mesta gde se pritisak menja, a na drugoj strani sabijanje i razređivanje vazduha.

M. Margules je još 1904 god. pokazao da možemo pomoću jednačine kontinuiteta proceniti na koji način i u kolikoj meri lokalne promene atmosferskog pritiska zavise od raspodele vektora brzine u okolnoj oblasti. Pokazao je da tačnost merenja nije dovoljna da bismo mogli pomoću podataka o vetru na raznim mestima izračunati lokalnu promenu pritiska u nekoj tački.

Skalarnim množenjem Eulerove jednačine kretanja

(1) $$\nabla p = -\varrho\nabla\emptyset - \varrho\dot{\vec{u}} - 2\varrho\vec{\omega}\times\vec{u}$$

elemntom puta $d\vec{s}$ koji leži u pravcu proizvoljno izabranog puta s i integralenjem duž puta od početne tačke A (s = 0) do tačke B, dobijamo za pritisak u tačci A, pod pretpostavkom da se položaj puta u toku vremena ne menja, sledeću vrednost:

$$p = p_s + \int_0^s \varrho\,\nabla\emptyset\cdot d\vec{s} + \int_0^s \varrho\dot{\vec{u}}\cdot d\vec{s} + 2\int_0^s \varrho\vec{\omega}\times\vec{u}\cdot d\vec{s}$$

(p_s = pritisak na kraju puta s u tačci B). Parcijalni izvod ove jednačine po vremenu t daje nam lokalnu promenu pritiska u tačci A:

(2) $$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p_s}{\partial t} + \int_0^s \frac{\partial(\varrho\nabla\emptyset)}{\partial t}\cdot d\vec{s} + \int_0^s \frac{\partial}{\partial t}(\varrho\dot{\vec{u}})\cdot d\vec{s} + 2\int_0^s \frac{\partial(\varrho\vec{\omega}\times\vec{u})}{\partial t}\cdot d\vec{s}$$

Iz dobivene opšte jednačine tendencije atmosferskog pritiska (Čadež, 1952) vidimo da do promene atmosferskog pritiska može da dođe iz tri različita uzroka: zbog menjanja mase vazduha u polju zemljine teže, zbog menjanja dejstva Coriolisove sile i zbog menjanja brzine vazduha.

Za dalje tumačenje izabraćemo put s ovako da nas duž vertikale (s = z) vodi do gornje granice atmosfere gde je p_s = 0. U tom slučaju dobijamo iz jedn. (2)

(3) $$\frac{\partial p}{\partial t} = \int_0^\infty \left[g\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho\dot{w})}{\partial t} - f'\,\frac{\partial(\varrho u)}{\partial t}\right]dz$$

(u = komponenta brzine u pravcu zapad-istok), odn. kad uzmemo još u obzir jednačinu kontinuiteta (u atmosferi gde nema diskontinuitetnih površina)

$$(4)\quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\int_0^\infty g\left[\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}\right]dz + g(\varrho w)_o + \int_0^\infty \frac{\partial(\varrho \dot{w})}{\partial t}dz - \int_0^\infty f'\frac{\partial(\varrho u)}{\partial t}dz$$

gde smo uzeli u obzir da $\frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}dz = d(\varrho w)$ pretstavlja promenu vertikalne komponente impulsa struje prilikom promene visine za dz i da je na vrhu atmosfere $\varrho w = 0$ a u tački A (pri z = 0) $\varrho w = (\varrho w)_o$. Ako dva člana koja ne zavise od sile teže, tj. poslednja dva člana, zanemarimo, dobijamo <u>Margulesovu jednačinu za lokalnu promenu atmosferskog pritiska</u>. Margules je došao do te jednačine neposredno iz jednačine kontinuiteta.

Posmatrajući promene atmosferskog pritiska zbog menjanja mase iznad mesta posmatranja, vidimo da do ove promene može da dođe i zbog horizontalne divergencije impulsa struje i zbog premeštanja vazduha u vertikalnom pravcu na mestu posmatranja. Ako je ta tačka na samom tlu, onda tamo taj uticaj na pritisak ne postoji. U tom slučaju je naime $w_o = 0$. Ovaj uticaj dolazi često sam do izražaja za vreme dnevnog zagrevanja i hlađenja, što ima za posledicu dizanje odn. spuštanje čitave atmosfere iznad ogromnih prostranstava. Kod lokalnih vertikalnih struja taj uticaj je u najvećoj meri kompenzovan sa horizontalnom divergencijom mase.

Koliki mogu da budu pojedni uticaji na atmosferski pritisak vidimo iz sledećih primera:

1. Neka bude u = 0, $\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} = \varrho\frac{\partial v}{\partial y} = \pm 1\ \text{kg m}^{-3}\cdot 1\ \text{m sec}^{-1}/100\ \text{km} = \pm 10^{-5}\ \text{kg m}^{-3}\text{sec}^{-1}$ i neka bude ovolika promena brzine (možda kao srednja vrednost) zapažena u 1000 m debelom sloju. U ovom slučaju promena pritiska zbog horizontalne divergencije mase iznosi

$$\frac{\partial p}{\partial t_1} = -g\int_0^{1000}\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}dz = \mp 10\cdot 1000\cdot 10^{-5}\ \text{kg m}^{-1}\ \text{sec}^{-3} = \mp 3{,}6\ \text{mb/čas}$$

2. Ako je $\varrho = 1\ \text{kg m}^{-3}$ i vertikalna komponenta brzine na mestu posmatranja $w_o = \pm 1\ \text{cm sec}^{-1}$ (red veličine srednjih uzlaznih i nizlaznih strujanja u ciklonu odn. anticiklonu), onda je odgovarajuća parcijalna promena pritiska

$$\frac{\partial p}{\partial t_2} = g(\varrho w)_o = \pm 10\cdot(1\cdot 0{,}01)\ \text{kg m}^{-1}\ \text{sec}^{-3} = \pm 3{,}6\ \text{mb/čas}$$

Jednovremena horizontalna divergencija mase koja je sa ovakvim strujanjem vazduha u vezi, uvek više ili manje utiče u suprotnom smislu na ukupnu promenu pritiska. Svakako je neposredni uticaj vertikalnog premeštanja vazdušnih masa na atmosferski pritisak to manji, što manja je oblast na kojoj se ovakva premeštanja vrše.

3. Pošto su vertikalna ubrzanja u atmosferi srazmerno vrlo mala i nisu istog znaka na čitavom putu integralenja od tačke A pa do vrha atmosfere, to se uticaj vertikalnih ubrzanja na atmosferski pritisak može uvek zanemariti.

4. Ako bi se konačno na geografskoj širini $\varphi = 45^o$ ($f' = 10^{-4}\ \text{sec}^{-1}$) komponenta brzine vetra u pravcu zapad istok u 1000 m

debelom sloju u toku jednog časa pri nepromenjenoj gustini ϱ = 1 kg m^{-3} promenila za 1 m sec^{-1}, onda bi se zbog promene sile devijacije pritisak pri tlu u toku jednog časa promenio za

$$\frac{\partial p}{\partial t_4} = -\int_0^\infty f' \frac{\partial(\varrho u)}{\partial t} dz = -10^{-4} \cdot 1 \text{ kg m}^{-1}\text{sec}^{-2}/\text{čas}$$

što je sasvim neznatna vrednost i može se uvek zanemariti.

Ako zbog malog uticaja na lokalne promene atmosferskog pritiska u jedn. (4) poslednja dva člana na desnoj strani zanemarimo i izvršimo diferencijaciju proizvoda u prvoj zagradi, dobijamo mesto jedn. (4) J. Bjerknes-ovu jednačinu tendencije pritiska

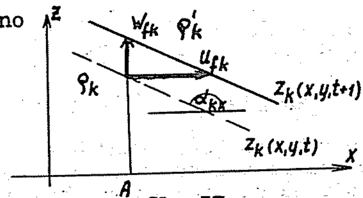
$$(5) \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = -\int_0^\infty g\left(u\frac{\partial \varrho}{\partial x} + v\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)dz - \int_0^\infty g\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\varrho \, dz + g(\varrho w)_0$$

U dalja tumačenja ove jednačine ovde nećemo da ulazimo.

2. Promene pritiska zbog singularne advekcije

Jednačina tendencije atmosferskog pritiska iz prethodnog odeljka važi samo za atmosferu u kojoj se sve veličine stanja u toku vremena kontinuarno menjaju i za koje postoje i svi ostali prvi izvodi koji se u jednačini javljaju. Za razliku od pre zamislimo sada da se atmosfera sastoji iz pojedinih slojeva koji se međusobno graniče preko diskontinuitetnih površina nultog reda.

Neka se iznad tačke A, u kojoj posmatramo promenu pritiska, visina z_k jedne, napr. k-te od ukupno n takvih površina u jedinici vremena promeni za w_{fk}. Zbog ove promene visine, vazduh mase $\varrho_k' w_{fk}$, koji se u trenutku posmatranja nalazi neposredno iznad granične površine iznad jedinice horizontalne površine u zapremini $1 \cdot w_{fk}$, u jedinici vremena zameni se donjim vazduhom mase $\varrho_k w_{fk}$ (ϱ_k, ϱ_k' = gustina vazduha neposredno ispod odn. iznad k-te granične površine). Ovo ima očigledno za posledicu da se u jedinici vremena pritisak promeni za $g(\varrho_k - \varrho_k')w_{fk}$. Ako saberemo sve ovakve promene pritiska zbog svih n diskontinuitetnih površina i uzmemo u obzir još ostale uticaje menjanja mase vazduha iznad tačke A na atmosferski pritisak, onda dobijamo za ukupnu lokalnu promenu atmosferskog pritiska u tačci A



Sl. 57
Uticaj vertikalnih premeštanja diskontinuitetnih površina na atmosferski pritisak

$$(1) \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = p_t = -\int_0^\infty g\left[\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}\right]dz + g(\varrho w)_0 + \sum_{k=1}^{n} g(\varrho_k - \varrho_k')w_{fk}$$

Parcijalnu promenu pritiska koja potiče od prisustva diskontinuitetnih površina

$$(2) \qquad p_t^{si} = \sum_{k=1}^{n} g(\rho_k - \rho_k') w_{fk}$$

nazvao je H. Ertel(1936), nemački meteorolog teoretičar, jedan od prvih meteorologa koji se u svojim istraživačkim radovima služio modernom matematičkom simbolikom, promenom zbog singularne advekcije nultog reda. Za razliku od ove, parcijalnu promenu

$$(3) \qquad p_t^{sl} = -\int_0^{\infty} g\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right] dz$$

H. Ertel je nazvao promenom zbog slobodne advekcije.

Ako pišemo jednačinu jedne (k-te) granične površine u obliku

$$(4) \qquad z_k = z_k(x,y,t)$$

onda je promena visine makoje tačke koja se zadržava na toj površini a do koje dođe u intervalu vremena dt

$$(5) \qquad dz_k = \frac{\partial z_k}{\partial x} dx + \frac{\partial z_k}{\partial y} dy + \frac{\partial z_k}{\partial t} dt$$

gde je (sl. 57)

$$(5) \qquad \frac{\partial z_k}{\partial x} = tg\alpha_{kx} \quad i \quad \frac{\partial z_k}{\partial y} = tg\alpha_{ky}$$

(α_{kx}, α_{ky} = ugao nagiba granične površine u pravcu x odn. y). Ako je $dz_k = 0$, onda je očigledno

$$(6) \qquad \frac{\partial z_k}{\partial t} = w_{fk} = - \nabla z_k \cdot \vec{u}_{fk}$$

gde je

$$\vec{u}_{fk} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, 0\right)$$

vektor brzine premeštanja granične površine u horizontalnom pravcu (sl. 57). Kad ovo uzmemo u jedn. (2) u obzir, dobijamo za promenu atmosferskog pritiska zbog singularne advekcije nultog reda

$$(7) \qquad p_t^{si} = - \sum_{k=1}^{n} g(\rho_k - \rho_k') \nabla z_k \cdot \vec{u}_{fk}$$

Promene zbog singularne advekcije od naročitog su značaja za proučavanje prodora hladnog i toplog vazduha.

Uzmimo sada u posmatranje samo jednu graničnu površinu, preko koje neka se graniči sa gornjim toplim vazduhom prizemni hladni vazduh koji brzinom u_f prodire u pravcu x-ose($\pi-\alpha = \alpha_x$, $\alpha_y = 0$). U saglasnosti sa jedn. (7) i (5) i jednačinom gasnog stanja dobijamo u ovom slučaju

$$(8) \qquad p_t^{si} = \frac{p\gamma_h u_f}{T_v T_v'}(T_v' - T_v) tg\alpha$$

(T_v, T_v' - virtuelna temp. vazduha neposredno ispod odn. iznad frontalne površine). Pošto u hladnom vazduhu koji prodire odn. se povlači

uvek važi sa dovoljnom tačnošću (u granicama merenja) barometarska visinska formula, to logaritamskim diferenciranjem iste po vremenu t, kad uzmemo još u obzir promenu zbog singularne advekcije nultog reda, dobijamo za ukupnu lokalnu promenu pritiska pri tlu

$$(9)\qquad \frac{\partial p_o}{\partial t} = \frac{p_o}{p}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p\gamma_h}{T'T} u_f (T' - T)\, tg\alpha - \frac{p_o \gamma_h}{T_s^2} z \frac{\partial T_s}{\partial t}$$

(p, p_o = pritisak u fiksnoj tačci neposredno iznad frontalne površine odn. pri tlu, T_s = srednja temperatura hladnog vazduha, mesto virtuelnih pisali smo obične temperature, z = visina frontalne površine)

Ako uzmemo ponovo u obzir barometarsku visinsku formulu i smatramo da se u hladnom vazduhu temperatura linearno menja sa visinom, onda mesto jedn. (9) možemo da pišemo

$$(10)\qquad \frac{\partial p_o}{\partial t} = a\frac{\partial p}{\partial t} - b\, u_f (T' - T)\, tg\alpha - c\, z\frac{\partial T_s}{\partial t}$$

gde su

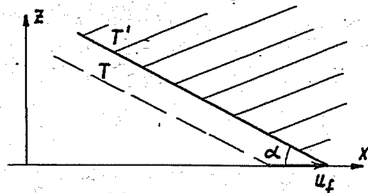
$$(11)\qquad a = e^{\frac{\gamma_h z}{T_s}}\,, \qquad b = p_o\, e^{-\frac{\gamma_h z}{T_s}}\, \gamma_h : T'\left(T_s - \frac{\gamma}{2} z\right)\,, \qquad c = \frac{p_o \gamma_h}{T_s^2}$$

(γ = vertikalni temperaturni gradijent). Nekoliko vrednosti koeficijenata a, b i c daje nam tablica.

t_o =	- 20		0		20		40		°C
	p_o = 1000 mb				z = 1000 m				
t_s =	- 23		- 3		17		37		°C
t^s =	- 26		- 6		14		34		
t' =	- 25	- 16	- 5	4	15	24	35	44	°C
a =	1,15		1,13		1,12		1,12		
b =	1,7	1,7	1,5	1,5	1,3	1,3	1,2	1,1	mb h^{-1}/m sec^{-1}grad
c =	0,54		0,47		0,40		0,35		mb h^{-1}/km grad h^{-1}
	p_o = 1000 mb				z = 2000 m				
t_s =	- 26		- 6		14		34		°C
t^s =	- 32		-12		8		28		°C
t' =	- 31	- 22	-11	-2	9	18	29	38	°C
a =	1,32		1,29		1,27		1,25		
b =	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,2	1,1	1,1	mb h^{-1}/m sec^{-1}grad
c =	0,56		0,48		0,41		0,36		mb h^{-1}/km grad h^{-1}

Vidimo da za razna brza izračunavanja možemo upotrebiti sledeće vrednosti: za z = 1000 odn. 2000 m: a = 1,1 odn. 1,3 za zimske mesece: b = 1,5 i c = 0,5 a za letnje b = 1,2 i c = 0,4.

Kao što vidimo iz jedn. (9) je za vreme prodiranja ($u_f > 0$) ili povlačenja ($u_f < 0$) hladnog vazduha (sl. 58) menjanje pritiska pri tlu u opštem slučaju posledica tri uzroka: menjanja pritiska u fiksnoj tačci na gornjoj granici hladnog vazduha u toplom vazduhu, menjanja debljine hladnog vazduha koji prodire ili se povlaći i menjanja srednje



Sl. 58

temperature tog hladnog vazduha iznad mesta posmatranja. Gornja lokalna promena pritiska utiće u istom smislu na pritisak pri tlu i povećava se u odnosu $p_o : p$.

Do lokalne promene srednje temperature T_s iz jedn. (10) može da dođe zbog raznih uticaja. Da bismo te uticaje mogli u našoj jednačini uzeti u obzir, izrazićemo prvo lokalnu promenu temperature $\frac{\partial T}{\partial t}$ pomoću individualne promene $\frac{dT}{dt}$ i geometrijskih promena $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$, i $\frac{\partial T}{\partial z}$. Očigledno je

(12)
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} - \frac{\partial T}{\partial x} u - \frac{\partial T}{\partial y} v - \frac{\partial T}{\partial z} w$$

U saglasnosti sa prvim principom termodinamike (V 1 (11)) je

(13)
$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c_p}\frac{dQ}{dt} + \frac{\alpha}{c_p}\frac{dp}{dt} - \frac{L}{c_p}\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

Ako uticaje na temperaturu vazduha koji potiču od menjanja pritiska prilikom premeštanja vazduha u horizontalnom pravcu i od lokalnih promena atmosferskog pritiska ne uzmemo u obzir, onda možemo u saglasnosti sa ranijim izlaganjima (V 4) da pišemo

(14)
$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c_{p,w}}\frac{dQ}{dt} - \gamma_{a,w}\, w$$

(eventualne razlike između T_v i T_v' nismo uzeli u obzir). Ovde je $\gamma_{a,w} = \gamma_w$ odn. γ_a i $c_{p,w} = c_{pw}$ odn. c_p, već prema tome da li je vazduh vodenom parom zasićen ili ne. Ako ovo uzmemo u jedn. (12) u obzir, dobijamo sledeću jednačinu za lokalnu promenu temperature

(15)
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c_p}\frac{dQ}{dt} - (\gamma_{a,w} - \gamma)\, w - \nabla_h T \cdot \vec{v}_h$$

(γ = vertikalni temperaturni gradijent, $\vec{v}_h$ = horizontalna komponenta vektora brzine). Integralenjem ove jednačine od 0 do z i posle deljenjem sa debljinom hladnog vazduha z dobijamo sa dovoljnom tačnošću za lokalnu promenu srednje temperature hladne vazdušne mase iznad tačke (x,y)

(16)
$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{1}{\bar{c}_{p,w}}\frac{d\bar{Q}}{dt} - (\bar{\gamma}_{a,w} - \bar{\gamma})\,\bar{w} - \frac{1}{z}\int_0^z \nabla_h T \cdot \vec{v}_h\, dz$$

($\frac{d\bar{Q}}{dt}$ = srednja vrednost za toplotu dovedenu jedinici mase hladnog vazduha iznad mesta posmatranja, $\bar{\gamma}$, $\bar{w}$ = srednja vrednost vertikalnog temperaturnog gradijenta odn. vertikalne komponente brzine vetra u hladnom vazduhu iznad mesta posmatranja, $\bar{\gamma}_{a,w} = \gamma_a$ ili odgovarajuća srednja vrednost γ_w ili neka vrednost koja leži između ove dve, ukoliko se na putu integralenja vrše kretanja sa vertikalnom komponentom delom zasićenog delom nezasićenog vazduha, slično je značenje srednje vrednosti $\bar{c}_{p,w}$.

Ako koordinatni sistem orijentišemo ovako da je x-osa usmerena od hladnog prema toplom vazduhu normalno na front (sl. 58), i smatramo da se temperatura menja samo u pravcima x i z, onda je

(17)
$$\int_0^z \nabla_h T \cdot \vec{v}_h dz = \int_0^z \frac{\partial T}{\partial x} u\, dz = \frac{\partial T_s}{\partial x}\bar{u}$$

($\bar{u}$ = srednja brzina kojom hladna vazdušna masa iznad mesta posmatranja prodire prema toplom vazduhu u pravcu normalnom na front, tj. u pravcu x). Unošenjem ove vrednosti u jedn. (16) dobijamo za lokalnu promenu srednje barometarske temperature hladnog vazduha

$$(18) \qquad \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{1}{c_p}\frac{d\bar{Q}}{dt} - 36\,(\bar{\gamma}_{a,w} - \bar{\gamma})\,\bar{w} - 0{,}036\,\frac{\partial T_s}{\partial x}\,\bar{u} \quad {}^{o}C/čas$$

Ovde treba izraziti vertikalne temperaturne gradijente u $^{o}C/100$ m, a horizontalni gradijent srednje temperature T_s u $^{o}C/100$ km a brzine u m/sec.

Vidimo da do promene srednje temperature hladnog vazduha iznad mesta posmatranja može doći zbog dovođenja toplote, zbog premeštanja hladnog vazduha u vertikalnom pravcu i zbog razlika u temperaturi hladne vazdušne mase u horizontalnom pravcu. Ako smatramo da se toplota dovodi samo preko podloge, onda je (str. 177)

$$(19) \qquad \frac{d\bar{Q}}{dt} = -K\,c_p\,\frac{\partial \theta}{\partial z} : \int_0^z \varrho\, dz = -\frac{K c_p}{\bar{\varrho}\, z}\,\frac{\partial \theta}{\partial z}$$

($\bar{\varrho}$ = srednja gustina hladnog vazduha, $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ = vertikalni ascendent potencijalne temperature u prizemnom sloju vazduha, K = koeficijent razmene) i

$$(20) \qquad \frac{1}{c_p}\frac{d\bar{Q}}{dt} = -\frac{0{,}036\,K}{\bar{\varrho}\, z}\,\frac{\partial \theta}{\partial z} \quad {}^{o}C/čas$$

Ovde treba K izraziti u kg m^{-1} sec^{-1}, z u kilometrima i $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ u $^{o}C/100$ m.

Kada prodire vazduh na vrlo toplu podlogu opada u prizemnom sloju vazduha potencijalna temperatura vrlo brzo sa visinom, za više stepeni na 100 m visinske razlike. Tada je uticaj prvog člana u jedn. (18) na menjanje temperature veliki.

Ako je napr. u oblasti prodora, dovođenje toplote samo posledica zagrevanja preko podloge i ako je

$K = 5$ kg m^{-1} sec^{-1}, $z = 2$ km, $\bar{\varrho} = 1$ kg m^{-3}, $\frac{\partial \theta}{\partial z} = -5^{o}C/100$ m, $\bar{\gamma}_{a,w} = 0{,}9^{o}C/100$ m, $\bar{\gamma} = 0{,}7^{o}C/100$ m, $\bar{w} = 0{,}05$ m/sec^{-1}, $\frac{\partial T_s}{\partial x} = 1^{o}C/100$ km i $\bar{u} = 10$ m sec^{-1}, onda je u saglasnosti sa (20) i (18)

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = 0{,}18 - 0{,}36 - 0{,}36^{o}C/čas = -0{,}54^{o}C/čas$$

Promene su napisane istim redom kao u jedn. (18). Ako je dalje

$\frac{\partial p}{\partial t} = -1$ mb/čas, $u_f = 10$ m sec^{-1}, $T' - T = 5^{o}C$ i $tg\alpha = -\frac{5}{1000}$, onda je za toplu polovinu godine na onom mestu u saglasnosti sa jedn. (10)

$$\frac{\partial p_o}{\partial t} = -1{,}3 + 0{,}3 + 0{,}4 \text{ mb/čas} = -0{,}6 \text{ mb/čas}$$

Promene su napisane istim redom kao u jedn. (10).

3. Promene atmosferskog pritiska kao posledica stišljivosti vazduha

Jednačine tendencije koje smo do sada napisali govore o promenama pritiska, do kojih u atmosferi dolazi zbog menjanja težine vazduha, zbog inercije vazdušnih masa i zbog menjanja sile devijacije. Ove jednačine ništa ne govore, bar neposredno, o tome da u atmosferi dolazi do menjanja pritiska i zbog toga što je vazduh stišljiv. Promene pritiska obavezno su praćene odgovarajućim termodinamičkim procesima i ovi nas ovde interesuju.

U oblasti tačke A je u saglasnosti sa jednačinom za dovedenu toplotu V 1 (13) individualna promena pritiska

$$(1) \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{\kappa - 1}{V}\left(\frac{dQ_M}{dt} - L\,\frac{dm}{dt}\right) - \frac{\kappa p}{V}\,\frac{dV_M}{dt} + \frac{\kappa L_s}{V}\,\frac{dm}{dt}.$$

Ako individualnu promenu pritiska izrazimo pomoću lokalne i geometrijske, dobijamo za lokalnu promenu pritiska

$$(2) \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp}{dt} - \vec{u}\cdot\nabla p$$

gde je $\frac{dp}{dt}$ vrednost iz jedn. (1).

U dobivenoj jednačini za lokalnu promenu atmosferskog pritiska se, za razliku od pre, ubrzanje zemljine teže uopšte ne javlja. Prema njoj može do lokalne promene pritiska u atmosferi doći zbog dovođenja toplote, zbog menjanja zapremine kao i zbog kondenzacije ili isparavanja.

Prilikom dovođenja i odvođenja toplote se obično odmah pojave odgovarajuće promene zapremine, slično i prilikom kondenzacije i isparavanja, tako da ove pojave obično neposredno praktično ne utiču na atmosferski pritisak. Svakako to nije slučaj kada se dovođenje i odvođenje toplote vrši eksplozivnom brzinom prilikom raznih eksplozija.

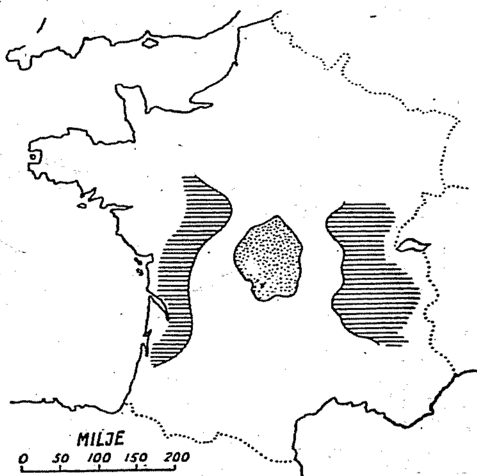
Posmatrajući promene pritiska u atmosferi sa ove tačke gledišta, vidimo da možemo smatrati kao da se vazduh nalazi na makom mestu u zatvorenom sudu, okruženom sa svih strana vazduhom i sa svuda pokretljivim zidovima (Čadež, 1958). Zapremina ovakvog suda u toku vremena neprestano se menja. S njom se menja i pritisak i to na potpuno sličan način kao u nekom zatvorenom sudu sa pokretnim klipom. Razlika je samo u tome da je u ovom slučaju menjanje zapremine mnogo složenije prirode i posledica je bezbrojnih impulsa koji se u atmosferi u vidu kompresionih talasa neprestano od molekula na molekul prenose na sve strane i koji imaju za posledicu odgovarajuće pomake vazduha. Barometrom, prema tome, ne merimo težinu vazduha već samo jačinu svih impulsa koji u jedinici vremena sa svih strana dolaze na jedinicu površine živinog stuba odn. kutiju barometra (aneroida). U slučaju da je atmosfera u stanju mirovanja ili pak da duvaju u njoj samo gradijentni ili geostrofski vetrovi pritisak je brojno jednak težini vazduha. Vidimo da ova činjenica ne znači još da barometar i meri stvarnu težinu jednog zamišljenog vertikalnog stuba vazduha sa presekom jedan.

Na barometar utiču impulsi koji dolaze sa svih strana i promene pritiska u jednoj tačci su posledica zbivanja u čitavoj okolnoj atmosferi i ne samo u vertikalnom stubu iznad barometra.

Ali, u datom elementarnom intervalu vremena dt ne utiče čitava atmosfera na promene pritiska u tačci A, već samo jedan deo. Ako je C_L brzina prostiranja kompresionih talasa, onda se taj deo nalazi u prostoru oblika lopte sa poluprečnikom $C_L dt$ i sa centrom u tačci A' koja je u pravcu i suprotnom smislu strujanja za udt (u = brzina vazduha) udaljena od tačke A (M. Čadež, 1953).

Kao što ćemo videti u sledećem odeljku C_L je brzina zvuka i iznosi oko 1/3 km/sec. Tako su napr. u mirnoj atmosferi promene pritiska u tačci A koje se zapažaju u intervalu vremena od 10 min posledica zbivanja u oblasti čija granica leži na otstojanju $\frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 60$ km = 200 km od tačke A. Tako u tačku A u dužem intervalu vremena dolaze impulsi i sa najvećih otstojanja i sa svih strana. Oni izazivaju promene pritiska koje su slika zbivanja u čitavoj atmosferi, u bližoj i daljnoj prošlosti. U ovom pogledu vršena su tek prva istraživanja, teorijske i praktične prirode (M. Čadež, 1945 i kasnije, B. Neis, 1946, 1950, F. Dessauer, W. Graffunder i J. Schaffhauser su talase ove prirode eksperimentalno pronašli, 1951).

S obzirom na činjenicu da oko mesta jake eksplozije postoje pri Zemlji jedna ili više zona tišina, tj. oblasti gde se eksplozija ne čuje (sl. 59), zaključivalo se već odmah posle prvih zapažanja za vreme prvog svetskog rata da moraju u višim slojevima atmosfere temperature vazduha biti srazmerno visoke. Zbog visokih temperatura zvučni talasi, koji dolaze sa zemljinog tla, odbijaju se od onih slojeva i vraćaju ka zemlji i posle odbijanja od zemljine podloge ponovo se odbijaju od gornjih toplih slojeva itd. Ovakvi talasi se dakle prostiru uglavnom samo u donjem delu atmosfere, čas naviše čas naniže i pri tome stvaraju zone čujnosti i tišine (sl. 60).

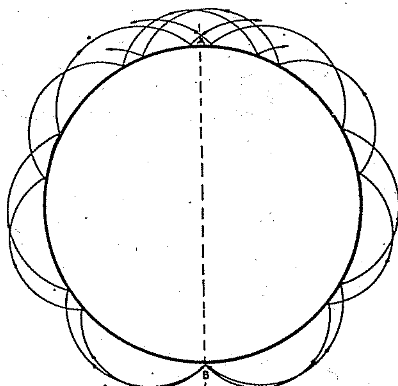


Sl. 59. Zone čujnosti oko mesta eksplozije u La Courtine (Francuska). Prema Maurain-u (iz rada E.G.R. Richardson-a - Waether, 1947)

Svaki zvučni talas na putu slabi. Koliko je to slabljenje danas još nije dovoljno proučeno. Kad bi jedan takav talas pošao prema nama iz antipodne tačke (sl. 60, tačka B) i prostirao bi se po samoj zemljinoj površini, trebao bi do nas 20 000·3 sec = 17 časova.

Iz ovog primera vidimo

da su zbivanja u atmosferi međusobno usko povezana. Na pitanje da li poremećaji i sa najvećih otstojanja mogu u tako kratko vreme u izvesnim slučajevima osetno uticati na stanje barometra i time na vreme uopšte, nauka još nije dala odgovor.

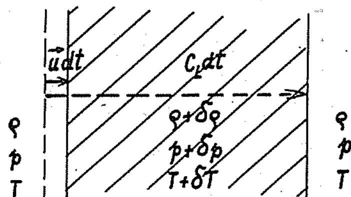


Sl. 60. Odbijanje zvučnih talasa od viših toplijih slojeva atmosfere

4. Promene pritiska izazvane kompresionim talasima

Videli smo da su promene pritiska u atmosferi praćene odgovarajućim promenama zapremine vazduha. Postoje razni uzroci, napr. dovođenje i odvođenje toplote, zbog kojih dolazi u atmosferi do menjanja zapremine vazduha. Ovde nas interesuju one promene pritiska koje su izazvane adijabatskim promenama zapremine vazduha, tj. kompresionim talasima, sa kojima se pojavljena promena pritiska brzinom prostiranja tih talasa prenosi sa jednog mesta na drugo.

Zamislimo da se u smislu slike 61 u intervalu vremena dt izvrši u mirnoj atmosferi srazmerno sporo pomeranje vazduha koji se nalazi neposredno ispred neke zamišljene ravne površine σ. Pomeranje neka se izvrši normalno na ovu površinu i to tako da kao posledica toga taj vazduh zauzme manju zapreminu. U posmatranom intervalu vremena dt nastaje ispred te površine neko zgušnjavanje vazduha. Pojavljeno zgušnjenje je debljine $C_L dt$ gde C_L znači brzinu kojom se prvi impuls prostire u prednji vazduh. Posmatrajmo deo nastalog zgušnjenja koji pripada elementu $d\sigma$ površine σ.



Sl. 61
Obrazovanje ravnog talasa

Zbog sabijanja vazduha, u zgušnjenju je pritisak porastao za δp. Ispred površine $d\sigma$ bio je zbog toga u posmatranom intervalu vremena dt prednjem vazduhu predat impuls

$$(1) \qquad I_{d\sigma, dt} = \delta p \, d\sigma \, dt$$

Istovremeno došlo je ispred posmatranog elementa površine do promene količine kretanja vazduha koji je bio pre izvršenog pomeranja u stanju mirovanja. Očigledno je ova promena

(2) $$A_{d\sigma, dt} = \rho d\sigma(C_L dt)\, u$$

(ρ = gustina vazduha, u = brzina kojom je izvršeno pomeranje površine $d\sigma$). Ako uzmemo u obzir da je prema zakonu o jednakosti akcije i reakcije podeljeni impuls jednak izvršenoj promeni količine kretanja, onda izjednačenjem jedn. (1) i (2) dobijamo

(3) $$\delta p = \rho C_L u$$

U poremećenom vazduhu ispred površine $d\sigma$ zajedno sa pritiskom povećala se i gustina vazduha. Pošto možemo pretpostaviti da se je kompresija izvršila adijabatski, to je pojavljena promena gustine (str. 87), pod uslovom da u → 0,

(4) $$\delta\rho = \frac{1}{\kappa}\frac{\rho}{p}\delta p$$

Na drugoj strani promena gustine vazduha posledica je pomeranja delića vazduha ispred elementa površine $d\sigma$. Zbog ovog pomeranja u intervalu vremena dt smanjila se zapremina $C_L d\sigma dt$ prednjeg vazduha za $d\sigma$ u dt, a gustina se povećala u odnosu na početnu očigledno za

(5) $$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{d\sigma\, u\, dt}{C_L d\sigma dt} = \frac{u}{C_L}$$

Ako sada dobivenu vrednost unesemo u jedn. (4), onda eleminacijom promene pritiska iz jedn. (3) i (4) dobijamo za brzinu prostiranja kompresionih talasa

(6) $$C_L = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\kappa R T} = \sqrt{\kappa R_s T_v}$$

To je brzina zvuka (Laplace-ova brzina zvuka).

Jednačina (4) važi potpuno tačno samo za infinitezimalno male promene pritiska δp, tj. samo za ~~infinitezimalno~~ male brzine u vazduha. Zbog toga i jednačina (6) važi potpuno tačno samo za beskonačno male brzine pomeranja (u). Kod konačnih brzina u izazvanim prostiranjem zgušnjenja stvarna brzina C prostiranja zgušnjenja uvek je veća od Laplace-ove brzine zvuka C_L. Govorimo o nadzvučnoj brzini prostiranja talasa.

Slično izvođenje dovodi nas i do brzine prostiranja razređenja vazduha. Za beskonačno male brzine u dobijamo jednaku vrednost kao kog zgušnjenja, tj. C_L. Kod konačnih brzina pomeranja brzina prostiranja razređenja je manja od Laplace-ove brzine zvuka.

Kod erupcija vulkana, kod eksplozije atomske bombe i raznih drugih eksplozija brzina prostiranja kompresionih talasa može da bude na početku više puta veća od Laplace-ove brzine zvuka. Prilikom eksplozije atomske bombe pojavi se prvo oko užarenog vazduha zgušnjenje vazduha koje se nadzvučnom brzinom udaljuje u okolnu atmosferu. Zbog vanredno visoke temperature (na početku se veruje da je na mestu eksplozije temperatura vazduha više miliona Celziusovih stepeni) užareni vazduh vanredno brzo se hladi (Stefanov zakon) i posle zgušnjenja prostire se zbog toga u okolinu razređenje vazduha i to podzvučnom brzinom. Pojavljeni impulsi imaju razorno dejstvo na otstojanju više kilometara od mesta eksplozije,

a osećaju se i na najvećim otstojanjima. Eksplozije hidrogenske bombe u SSSR prouzrokuju na pr. u Japanu oscilacije pritiska reda veličine 0,1 mm Hg. Razlika između brzine prostiranja zgušnjenja i razređenja ima među ostalim za posledicu da su tragovi na barografu od iste atomske eksplozije na raznim mestima po izgledu različiti.

Laplace-ova brzina zvuka funkcija je virtuelne temperature. Koliko ona iznosi pri raznim virtuelnim temperaturama daje nam tablica.

t_v =	- 80	- 60	- 40	- 20	0	20	40	60	^oC
C_L =	279	293	306	319	331	343	355	366	m sec^{-1}

Zajedno sa zgušnjenjem prostire se porast pritiska (3), a sa razređenjem smanjenje pritiska (u jedn. (3) $u < 0$). Na mestu gde se prostire impuls (zgušnjenje ili razređenje) brzinom $C_L = 330$ m sec^{-1}, gde je brzina vazduha zbog prostiranja impulsa ± 1 m sec^{-1} i gde je gustina $\varrho = 1$ kg m^{-3} je zbog prostiranja ovog impulsa atmosferski pritisak promenjen za

$$\delta p = \pm 1 \cdot 330 \cdot 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ sec}^{-2} = 3,3 \text{ mb.}$$

XI. POREMEĆENJA JEDNOSTAVNIH OSNOVNIH STANJA ATMOSFERE

1. Euler-ove jednačine poremećenja pravolinijskog strujanja

Poznavanjem jednačina poremećaja (VII-6) za atmosferu u kojoj su osnovna pravolinijska strujanja poremećena možemo doći do vrlo značajnih rezultata i proučiti razne osobine atmosfere u pogledu talasanja. To su bili jedan od glavnih predmeta proučavanja V. Bjerknesa i njegove škole. Ovde zamišljamo da je osnovno stanje pretstavljeno horizontalnim geostrofskim **vetrovima.**

Ako se strujanje vrši u pravcu x-ose, onda je u Eulerovom sistemu osnovno stanje pretstavljeno na sledeći način (str. 141 i 144)

$$(\overline{1})\quad \begin{aligned} &\overline{u} = \overline{u}(y,z) = -\frac{1}{f\overline{\varrho}}\frac{\partial\overline{p}}{\partial y}, \quad \overline{v} = \overline{w} = 0, \frac{\partial\overline{p}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\overline{p}}{\partial z} = -g\overline{\varrho} + f'\overline{u} \\ &\overline{\varrho} = \overline{\varrho}(y,z), \quad \overline{p} = \overline{p}(y,z), \quad \overline{T} = \overline{T}(y,z), \ldots \end{aligned}$$

Pošto se u oblasti geostrofskih vetrova ne javljaju nikakve lokalne ni individualne promene veličina stanja, to sve veličine mogu da budu samo funkcije koordinata y i z, što znači da rešenje ($\overline{1}$) sadrži i početne uslove (VIII-1).

Euler-ove jednačine kretanja i jednačina kontinuiteta svuda u polju identično su ispunjene. Isto važi i za jednačinu stanja kao i za jednačinu prvog i drugog principa termodinamike.

U ovakvoj oblasti mogu da postoje i granične površine. Ukoliko postoje (kao granice između donjeg gušćeg i gornjeg ređeg vazduha), visina $z = \overline{h}$ ovakve jedne granične površine u toku vremena se ne menja. Zbog stacionarnosti strujanja, koje se vrši samo u pravcu x-ose, ova može da bude samo funkcija koordinate y:

$$(\overline{2})\qquad \overline{f}(y,z) = z - \overline{h}(y) = 0$$

Svaka granična površina je dakle neka cilindrična površina sa generatrisom u pravcu ose x. Kinematički granični uslov svuda je identično ispunjen (normalna komponenta brzine na graničnu površinu svuda je jednaka nuli), a dinamički granični uslov glasi

$$(\overline{3})\qquad \left(\frac{\partial\overline{p}}{\partial y} - \frac{\partial\overline{p}'}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial\overline{p}}{\partial z} - \frac{\partial\overline{p}'}{\partial z}\right) dz = 0$$

(Margulesov granični uslov za nagib stacionarnih graničnih površina, str. 155) gde su dy i dz komponente elementa puta $d\vec{s}$ na graničnoj površini u pravcima y i z.

Sada zamislimo da je došlo iz makog uzroka do malog poremećenja tog osnovnog stanja. Pitamo se kako glasi Euler-ov sistem jednačina poremećenog stanja. Taj sistem smatramo rešenim ako poznajemo veličine

$$(1)\quad \vec{\overline{u}} + \vec{u} = (\overline{u} + u, v, w), \quad \overline{\varrho} + \varrho, \quad \overline{p} + p, \quad \overline{T} + T, \ldots$$

kao funkcije koordinata x, y, z i vremena t kao nezavisnih promenljivih.

Kad uzmemo u obzir jedn. ($\bar{1}$) vidimo da u našem slučaju jednačine dinamike VII-6 (3) (str. 141) glase

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + w\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \bar{\alpha}\frac{\partial p}{\partial x} - f v + f'w = 0$$

(2)
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial v}{\partial x} + \bar{\alpha}\frac{\partial p}{\partial y} + \alpha\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + f u = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial w}{\partial x} + \bar{\alpha}\frac{\partial p}{\partial z} + \alpha\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - f'u = 0$$

Jednačina kontinuiteta glasi očigledno

(3)
$$\frac{\partial(\bar{\varrho}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\varrho}v)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\varrho}w)}{\partial z} + \frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0$$

Iz jedn. VII-1 (8) i ($\bar{3}$) dobijamo za mešoviti granični uslov

(4)
$$\frac{\partial(p-p')}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(p-p')}{\partial x} + v\frac{\partial(\bar{p}-\bar{p}')}{\partial y} + w\frac{\partial(\bar{p}-\bar{p}')}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial(p-p')}{\partial t} + \bar{u}'\frac{\partial(p-p')}{\partial x} + v'\frac{\partial(\bar{p}-\bar{p}')}{\partial y} + w'\frac{\partial(\bar{p}-\bar{p}')}{\partial z} = 0$$

Ako je atmosfera pijezotropna, onda u saglasnosti sa jedn. ($\bar{1}$) jednačina pijezotropije VII-1 (13) glasi

(5)
$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial\varrho}{\partial x} + v\frac{\partial\bar{\varrho}}{\partial y} + w\frac{\partial\bar{\varrho}}{\partial z} = \gamma\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} + w\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)$$

Napisani sistem jednačina poremećaja može se, svakako, primeniti i na mirnu atmosferu. U tom slučaju treba samo staviti $\bar{u} = 0$.

2. Lagrange-ove jednačine poremećenja pravolinijskog strujanja

Jednostavno nalazimo i Lagrange-ove jednačine osnovnog i poremećenog stanja za slučaj da je osnovno stanje pretstavljeno geostrofskim vetrovima. Za razliku od pre zadatak ćemo ovde pojednostaviti još time da ćemo smatrati da vektor brzine $\vec{\bar{u}}$ ne zavisi ni od mesta.

Geostrofski vetrovi osnovnog stanja neka duvaju u pravcu horizontalne $\bar{x}_o = a$ ose. U tom slučaju je osnovno stanje određeno na sledeći način:

($\bar{1}$)
$$\vec{\bar{r}} = (\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \quad \text{gde je} \quad \bar{x} = a + \bar{u}\,t, \quad \bar{y} = b, \quad \bar{z} = c$$

$$\bar{\varrho} = \bar{\varrho}(b,c), \quad \bar{p} = \bar{p}(b,c), \quad \bar{T} = \bar{T}(b,c), \quad \bar{u} = \bar{u}(b,c), \ldots$$

U našem ortogonalnom koordinatnom sistemu a,b,c je ubrzanje Coriolis-ove sile

$$-\vec{\bar{C}} = 2\vec{\omega}\times\vec{\bar{u}} = \begin{vmatrix} \vec{i}, & \vec{j}, & \vec{k} \\ 2\omega_a, & 2\omega_b, & 2\omega_c \\ \bar{u}, & 0, & 0 \end{vmatrix} = (0,\ 2\omega_c\bar{u},\ -2\omega_b\bar{u})$$

Ako uzmemo ovo u jedn. VII-3 (5') u obzir, dobijamo jednačine kretanja osnovnog stanja ($\overline{1}$)

$$(\overline{2}) \qquad g_b + 2\omega_c\overline{u} + \overline{\alpha}\frac{\partial\overline{p}}{\partial b} = 0 \qquad\qquad g_c - 2\omega_b\overline{u} + \overline{\alpha}\frac{\partial\overline{p}}{\partial c} = 0$$

gde je

$$g_b = \frac{\partial\emptyset}{\partial b} \qquad \text{i} \qquad g_c = \frac{\partial\emptyset}{\partial c}$$

Jednačina kontinuiteta identično je ispunjena. Slično kao pre jednačina granične površine glasi

$$(\overline{3}) \qquad \overline{f}(b,c) = 0$$

Kinematički granični uslov identično je ispunjen. U saglasnosti sa jedn. VII-4 (6), ($\overline{2}$) i ($\overline{1}$) za dinamički granični uslov dobijamo

$$(\overline{4}) \qquad \begin{gathered}\left[\overline{\varrho}(g_b + 2\omega_c\overline{u}) - \overline{\varrho}'(g_b + 2\omega_c\overline{u}')\right] db + \\ \left[\overline{\varrho}(g_c - 2\omega_b\overline{u}) - \overline{\varrho}'(g_c - 2\omega_b\overline{u}')\right] dc = 0\end{gathered}$$

Sada zamislimo da iz makog uzroka dođe do poremećenja ovog osnovnog stanja. Rešenje poremećenog stanja tražimo u obliku

$$(1) \qquad \vec{\overline{r}} + \vec{r} = (a + t\overline{u} + x,\ b + y,\ c + z),\ \overline{\varrho} + \varrho,\ \ \overline{p} + p,\ \ \overline{T} + T, \ldots$$

Da bismo došli do ovog rešenja treba da nađemo poremećenja

$$\vec{r} = (x,y,z),\quad \vec{u},\quad \varrho,\quad p,\quad T, \ldots$$

kao funkcije **nezavisno** promenljivih označavajućih koordinata a,b, c i vremena t. Smatraćemo da su svi poremećaji srazmerno mali. Oni treba da zadovolje sve jednačine Lagrange-ovog sistema. Te jednačine želimo ovde napisati.

Jednačine kretanja dobijamo iz opšte jednačine VII-6 (7). Prvo treba da izračunamo neke vrednosti.

U saglasnosti sa osnovnim stanjem ($\overline{1}$) je

$$\nabla_o\vec{\overline{r}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\overline{x}}{\partial a}, & \frac{\partial\overline{y}}{\partial a}, & \frac{\partial\overline{z}}{\partial a} \\ \frac{\partial\overline{x}}{\partial b}, & \frac{\partial\overline{y}}{\partial b}, & \frac{\partial\overline{z}}{\partial b} \\ \frac{\partial\overline{x}}{\partial c}, & \frac{\partial\overline{y}}{\partial c}, & \frac{\partial\overline{z}}{\partial c} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix},$$

$$\dot{\vec{\overline{u}}} = \ddot{\vec{\overline{r}}} = 0, \qquad \nabla_o\overline{p} = \left(0, \frac{\partial\overline{p}}{\partial b}, \frac{\partial\overline{p}}{\partial c}\right) \qquad \text{i} \qquad \emptyset = g_b y + g_c z$$

Ako a (= x_o) osu orijentišemo prema istoku ($\omega_a = 0$), je dalje

$$2\vec{\omega}\times\vec{\overline{u}} = (0,\ 2\omega_c\overline{u},\ -2\omega_b\overline{u}) \qquad \text{i}$$

$$2\vec{\omega}\times\vec{u} = (2\omega_b w - 2\omega_c v,\ 2\omega_c u, -2\omega_b u)$$

Uzimanjem dobivenih vrednosti u jednačini kretanja VII-6 (7) u obzir dobijamo jednačinu kretanja za posmatranu poremećenu atmosferu

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2\omega_b w - 2\omega_c v + \frac{\partial \psi}{\partial a} = 0$$

(2) $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\omega_c u + \frac{\partial \psi}{\partial b} + \alpha\frac{\partial \bar{p}}{\partial b} - p\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 2\omega_b u + \frac{\partial \psi}{\partial c} + \alpha\frac{\partial \bar{p}}{\partial c} - p\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial c} = 0$$

Ovde je

(3) $$\psi = \bar{\alpha}p + (g_b + 2\omega_c\bar{u})\,y + (g_c - 2\omega_b\bar{u})\,z$$

Koeficijenti kod y i z su konstante.

Individualne promene α i p u pijezotropnoj atmosferi nisu nezavisne među sobom. Ako je koeficijent pijezotropije γ, onda je očigledno u takvoj atmosferi, što ovde i pretpostavljamo,

(4) $$\alpha = -\gamma\bar{\alpha}^2 p$$

Ova jednačina sadrži u sebi jednačine prvog i drugog principa termodinamike i jednačinu stanja vazduha. Ako za svaku tačku polja znamo koeficijent barotropije Γ, onda možemo pisati dalje

(5) $$\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial b} = -\Gamma\bar{\alpha}^2\frac{\partial \bar{p}}{\partial b} \quad \text{i} \quad \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial c} = -\Gamma\bar{\alpha}^2\frac{\partial \bar{p}}{\partial c}$$

Uzimanjem dobivenih vrednosti (4) i (5) i jedn. ($\bar{2}$) u obzir, vidimo da, u slučaju da je atmosfera pijezotropna, možemo zbir poslednja dva člana u jedn. (2^2) i (2^3) pisati na sledeći način

(6) $$\alpha\frac{\partial \bar{p}}{\partial b} - p\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial b} = -(\Gamma - \gamma)\bar{\alpha}p(g_b + 2\omega_c\bar{u})$$

$$\alpha\frac{\partial \bar{p}}{\partial c} - p\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial c} = -(\Gamma - \gamma)\bar{\alpha}p(g_c - 2\omega_b\bar{u})$$

Time jednačine dinamike (2) dobijaju sledeći oblik

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2\omega_b\frac{\partial z}{\partial t} - 2\omega_c\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial a} = 0$$

(7) $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\omega_c\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial b} - (\Gamma - \gamma)\bar{\alpha}p(g_b + 2\omega_c\bar{u}) = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 2\omega_b\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial c} - (\Gamma - \gamma)\bar{\alpha}p(g_c - 2\omega_b\bar{u}) = 0$$

One pod navedenim pojednostavljenjima sadrže u sebi i jednačinu gasnog stanja i jednačine prvog i drugog principa termodinamike. Važe i za slučaj da je $\bar{u} = 0$.

Jednačinu kontinuiteta dobijamo kad uzmemo u obzir da je u našem slučaju ($\bar{1}$) i (1)

(8) $$\frac{D(\bar{x}+x, \bar{y}+y, \bar{z}+z)}{D(a,b,c)} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b}, & 1 + \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c}, & \frac{\partial y}{\partial c}, & 1 + \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = 1 + \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c}$$

gde smo male veličine drugog reda zanemarili. Ako uzmemo još u

obzir da je odgovarajuća determinanta koja se odnosi na osnovno stanje jednaka jedinici i da možemo pisati $\varrho = \gamma p$, onda oduzimanjem jedn. VII-6 (8) od jedn. VII-6 (9) dobijamo jednačinu kontinuiteta

(9) $$\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c} + \gamma \bar{\alpha} p = \bar{\alpha} \varrho_o$$

Napisaćemo još mešoviti granični uslov za poremećenu atmosferu.

Prvo treba pronaći vrednosti pojedinih članova koji se u jednačini mešovitog graničnog uslova VII-5 (7) javljaju.

U saglasnosti sa identitetom VII-4 (4) je pod našim uslovima ($\bar{1}$) i (1) i sa našom tačnošću

$$\frac{D(\bar{x}+x,\bar{y}+y,\bar{z}+z)}{D(a,b,c)}\left[\nabla_o(\vec{\bar{r}}+\vec{r})\right]^{-1} = \begin{cases} 1 + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c}, & -\frac{\partial y}{\partial a}, \quad -\frac{\partial z}{\partial a} \\ -\frac{\partial x}{\partial b}, & 1 + \frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial x}{\partial a}, \quad -\frac{\partial z}{\partial b} \\ -\frac{\partial x}{\partial c}, & -\frac{\partial y}{\partial c}, \quad 1 + \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} \end{cases}$$

Odavde i iz jedn. (8) dobijamo, ako male veličine drugog i višeg reda zanemarimo,

$$\left[\nabla_o(\vec{\bar{r}}+\vec{r})\right]^{-1} = \begin{cases} 1 - \frac{\partial x}{\partial a}, & -\frac{\partial y}{\partial a}, & -\frac{\partial z}{\partial a} \\ -\frac{\partial x}{\partial b}, & 1 - \frac{\partial y}{\partial b}, & -\frac{\partial z}{\partial b} \\ -\frac{\partial x}{\partial c}, & -\frac{\partial y}{\partial c}, & 1 - \frac{\partial z}{\partial c} \end{cases}$$

Prema tome je u ovom našem slučaju $(\frac{\partial \bar{p}}{\partial a} = 0)$

$$\nabla(\bar{p} + p) = \left[\nabla_o(\vec{\bar{r}}+\vec{r})\right]^{-1} \cdot \nabla_o(\bar{p} + p) =$$

$$= \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial a} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}, \\ \frac{\partial(\bar{p}+p)}{\partial b} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}, \\ -\frac{\partial \bar{p}}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial(\bar{p}+p)}{\partial c} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial c} \end{cases}$$

Iz jedn. (1) dobijamo još

$$\frac{\partial(\vec{\bar{r}}+\vec{r})}{\partial t} = (\bar{u} + \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t})$$

Ako sada dobivene vrednosti i slične za gornji vazduh unesemo u jedn. VII-5 (7) i izvršimo potrebna zanemarenja, dobijamo traženi mešoviti granični uslov

(10) $$\begin{aligned} &\frac{\partial(p - p')}{\partial t} - (\bar{u} - \bar{u}')(\frac{\partial p'}{\partial a'} - \frac{\partial \bar{p}'}{\partial b'}\frac{\partial y'}{\partial a'} - \frac{\partial \bar{p}'}{\partial c'}\frac{\partial z'}{\partial a'}) \\ &- (\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y'}{\partial t})\frac{\partial \bar{p}'}{\partial b'} - (\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z'}{\partial t})\frac{\partial \bar{p}'}{\partial c'} = 0 \\ &\frac{\partial(p - p')}{\partial t} - (\bar{u} - \bar{u}')(\frac{\partial p}{\partial a} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}) \\ &- (\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y'}{\partial t})\frac{\partial \bar{p}}{\partial b} - (\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z'}{\partial t})\frac{\partial \bar{p}}{\partial c} = 0 \end{aligned}$$

3. Talasi na graničnim površinama

U atmosferi se vazduh zbog raznih uzroka na raznim mestima talasa. Tamo možemo da vidimo talase raznih vrsta. Najočigledniji su možda oni koji nastaju odn. se primećuju na granici između dva sloja vazduha sa različitim gustinama. Na takvim granicama često se vide oblaci koji po svom obliku očigledno ukazuju na talasanje vazduha na onim visinama. U vezi sa takvim pojavama stojimo pred pitanjem, od čega zavisi talasna dužina pojavljenih talasa. Proučavanju talasa na graničnim površinama u atmosferi posvetilo je pažnju više istraživača i prva rešenja potiču od H. Helmholtz-a (1889, 1890), W. Wien-a (1894, 1895) i H. Lamb-a (1911).

Zamislimo da u atmosferi iznad hladnog sloja vazduha leži topliji vazduh. Vazduh neka se na početku kreće samo u pravcu horizontalne $\bar{x}_o = a$ ose ortogonalnog koordinatnog sistema $\bar{x}_o, \bar{y}_o, \bar{z}_o$ u vidu geostrofskih vetrova brzinom $\bar{u}$ ispod i brzinom $\bar{u}'$ iznad granične površine. I jedna i druga vrednost neka ne zavisi od mesta. Prema tome je položaj makog delića vazduha (a,b,c) iz donjeg dela atmosfere u sistemu $\bar{x}_o = a$, $\bar{y}_o = b$, $\bar{z}_o = c$ u vremenu t određen koordinatama

$$\bar{x} = a + \bar{u}\, t, \quad \bar{y} = \bar{y}_o = b, \quad \bar{z} = \bar{z}_o = c \tag{1}$$

Slično su u trenutku vremena t u tom istom sistemu koordinate delića a',b'c' koji se nalazi iznad granične površine

$$\bar{x}' = a' + \bar{u}'\, t \quad \bar{y}' = \bar{y}_o' = b' \quad \bar{z}' = \bar{z}_o' = c' \tag{1'}$$

Ako dolazi na jednom ili na više mesta do poremećenja tog osnovnog stanja, onda počinju nastali poremećaji da se prostiru nekom određenom brzinom od izvornog mesta na sve strane u atmosferu. Atmosfera se uznemiri, a na koji način, to je naše pitanje.

Kako i zbog čega dolazi u atmosferi do takvih poremećaja zavisi od raznih pojava. Ovde nas interesuje slučaj da se uznemirenje periodično ponavlja. To se napr. redovno dešava tada kada vazduh nailazi na izvesne prepreke ispred kojih se diže, a neposredno iza njih, ukoliko je atmosfera stabilna, spušta. Zbog poremećenog ravnotežnog stanja nastaje talasanje vazduha iza a delom i ispred prepreke, slično kao što se pojave talasi u vodi koja teče u koritu sa neravnim dnom.

Uticaj orografskih prepreka na talasanje vazduha je problem koji zaslužuje našu posebnu pažnju. O njemu biće reči u drugom delu ovog udžbenika. Ovde nas interesuju samo osnovni zakoni zbog kojih se talasa vazduh u atmosferi kao i osnovne osobine atmosfere u tom pogledu.

Na svako talasanje utiče među ostalim silama Coriolis-ova sila, ali pošto se ovde ograničavamo na posmatranje samo u manjem prostoru, njen uticaj za sada nećemo uzeti u obzir. Granična površina će zbog toga na samom početku ležati horizontalno, a ne pod izvesnim, svakako malim nagibom. Vazduh ćemo da smatramo kao nestišljivu tečnost i homogenu iznad kao i ispod granične površine:

$$\gamma = \Gamma = \gamma' = \Gamma' = 0 \tag{2}$$

Naš zadatak pojednostavimo još time da smatramo da se svi delići koji imaju jednake označavajuće koordinate a i c jednovremeno i jednako jako poremete. Ako ose c i c' orijentišemo prema zenitu, onda se pod svim navedenim uslovima naš zadatak svodi na rešenje sledećeg sistema jednačina (2 (2), 2 (9))

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial a}(\bar{\alpha} p + gz) = 0$$

(3) $$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial c}(\bar{\alpha} p + gz) = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial c} = 0$$

za donji vazduh i sličnog za gornji. Na granici između ova dva sloja vazduha treba, svakako, da budu ispunjeni svi granični uslovi.

Između bezbroj rešenja ovog sistema homogenih parcijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima tražimo ovde rešenje u vidu talasa koji se prostiru u pravcu ose a. Kad uzmemo u obzir da je izvod obične eksponencijalne funkcije do multiplikacione konstante jednak funkciji samoj, onda možemo tražiti naše rešenje sistema jedn. (3) u sledećem obliku

$$x = A_1 e^{\beta c} \cos(\gamma a + \delta t)$$

(4) $$z = A_2 e^{\beta c} \sin(\gamma a + \delta t)$$

$$p = A_3 e^{\beta c} \sin(\gamma a + \delta t)$$

gde su A_1, A_2, A_3, β, γ i δ konstante čije značenje i vrednosti tražimo.

Rešenje tražimo u vidu periodičnih funkcija sa kojima želimo prethodno da se malo bliže upoznamo.

U trenutku vremena $t = t_1$ ima makoji od tri poremećaja x, z i p jednaku vrednost u tačkama $a, a_1, a_2, \ldots$ koje su određene jednačinama

$$\gamma a + \delta t_1 + 2\pi = \gamma a_1 + \delta t_1, \quad \gamma a_1 + \delta t_1 + 2\pi = \gamma a_2 + \delta t_1, \ldots$$

Odavde vidimo da je talasna dužina ovih talasa svuda u polju jednaka i da iznosi

(5) $$\ell = a_1 - a = a_2 - a_1 = \cdots = \frac{2\pi}{\gamma}$$

Poremećaj $x = x_1$ izvršen u pravcu ose a koji se u trenutku vremena $t = t_1$ odnosi na tačku a koja je vezana za odnos

(6) $$x_1 = A_1 e^{\beta c} \cos(\gamma a + \delta t_1)$$

biće posle intervala vremena dt u tačci $a_1 = a + C_r dt$ (C_r = brzina prostiranja talasa = fazna brzina) za koju očigledno važi, (5),

(7) $$C_r = -\frac{\delta}{\gamma} = -\frac{\delta \ell}{2\pi}$$

Iz dobivenih jednačina dobijamo odmah još period i <u>frekvenciju</u> (<u>učestanost</u>) talasanja (str. 124):

$$\tau_r = \frac{\ell}{C_r} = -\frac{2\pi}{\delta} \quad \text{i} \quad \nu_r = \frac{1}{\tau_r} = -\frac{\delta}{2\pi} \tag{8}$$

Veličine C_r, τ_r i ν_r odnose se, očigledno, na posmatrača koji se zajedno sa osnovnom strujom (brzinom $\bar{u}$) kreće. Za posmatrača koji je u stanju mirovanja su odgovarajuće vrednosti

$$C = C_r + \bar{u}, \quad \tau = \frac{\ell}{C_r + \bar{u}}, \quad \nu = \frac{C_r + \bar{u}}{\ell} = \nu_r + \frac{\bar{u}}{\ell} = \frac{2\pi C}{\gamma} \tag{9}$$

Relativna učestanost ν_r zove se i <u>učestanost orbite</u> (= trajektorije = putanje), a učestanost ν zove se i <u>lokalna učestanost</u>.

Iz jednačina (9) dobijamo još

$$\gamma = \frac{2\pi}{\ell} = \text{broj talasa (= broj talasa na otstojanju } 2\pi) \tag{10}$$

i

$$-\delta = 2\pi\nu_r = 2\pi\left(\nu - \frac{\bar{u}}{\ell}\right) = \text{kružna učestanost orbite} \tag{11}$$

Unošenjem vrednosti (4) u jedn. (3), dobijamo posle skraćivanja sledeće tri uslovne jednačine

$$\begin{aligned} -A_1\delta^2 + \bar{\alpha}A_3\gamma + gA_2\gamma &= 0 \\ -A_2\delta^2 + \bar{\alpha}A_3\beta + gA_2\beta &= 0 \\ -A_1\gamma + A_2\beta &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Trivijalno rešenje ovog sistema $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ ne daje nam nikakvo poremećenje. Ove vrednosti su različite od nule i poremećenje postoji kada je determinanta tog sistema homogenih linearnih jednačina za A_1, A_2 i A_3 jednaka nuli, a to je tada kada je

$$\beta = \pm\gamma \tag{13}$$

U tom slučaju je u saglasnosti sa jedn. (12)

$$A_2 = \pm A_1 \qquad A_3 = \mp\bar{\rho}A_1\left(\frac{\delta^2}{\gamma} \mp g\right) \qquad \left(\bar{\rho} = \frac{1}{\bar{\alpha}}\right) \tag{14}$$

Ako sada u sistemu jednačina (4) ovo uzmemo u obzir i za β uzmemo jedanput pozitivnu a drugi put negativnu vrednost, onda dobijamo dva partikularna rešenja tog sistema jednačina. Pošto je kod linearnih diferencijalnih jednačina linearna kombinacija makojih partikularnih rešenja opet jedno rešenje, to rešenje našeg sistema jednačina (3) tražimo u obliku

$$\begin{aligned} x &= (A\,e^{\gamma c} + B\,e^{-\gamma c})\cos(\gamma a + \delta t) \\ z &= (A\,e^{\gamma c} - B\,e^{-\gamma c})\sin(\gamma a + \delta t) \\ p &= \bar{\rho}\left[A\left(\frac{\delta^2}{\gamma} - g\right)e^{\gamma c} + B\left(\frac{\delta^2}{\gamma} + g\right)e^{-\gamma c}\right]\sin(\gamma a + \delta t) \end{aligned} \tag{15}$$

(konstanta A po apsolutnoj vrednosti ne mora da bude jednaka konstanti B). Potpuno sličan sistem jednačina važi i za gornji vazduh

gde su odgovarajuće veličime x', z', p', $\bar{\varrho}'$, A', B', δ'.

Za posmatrača koji je u odnosu na zemljino tle u stanju mirovanja neka bude brzina prostiranja svih talasa C. Ako uzmemo u obzir jedn. (9) i (7), onda vidimo da zbog toga važi

$$C = -\frac{\delta}{\gamma} + \bar{u} = -\frac{\delta'}{\gamma} + \bar{u}' \tag{16}$$

Delići vazduha koji leže neposredno ispod unutrašnje granične površine (granice između donjeg sloja vazduha gustine $\bar{\varrho}$ i gornjeg gustine $\bar{\varrho}'$) kao i oni koji leže neposredno iznad nje imaju svi jednaku treću označavajuću koordinatu, koja neka bude c_o. Ovo je razumljivo kad uzmemo u obzir da kod osnovnog stanja granična površina leži horizontalno ($c = c' = c_o = \text{const}$).

Vazduh neka se talasa između dve nepokretne horizontalne površine $c_g < c_o$ i $c_g' > c_o$. U saglasnosti sa našim graničnim uslovima tre-ba da bude na površinama c_g i c_g' vertikalna komponenta vektora brzine uvek i svuda jednaka nuli, a to je moguće, kao što vidimo iz jedn. (15), samo pod uslovom da je

$$A\, e^{\gamma c_g} - B\, e^{-\gamma c_g} = 0 \quad \text{i} \quad A' e^{\gamma c_g'} - B' e^{-\gamma c_g'} = 0$$

Ako izaberemo dve nove konstante x_a i x_a' možemo očigledno pisati

$$A = \frac{x_a}{2} e^{-\gamma c_g}, \quad B = \frac{x_a}{2} e^{\gamma c_g} \quad \text{i} \quad A' = \frac{x_a'}{2} e^{-\gamma c_g'}, \quad B' = \frac{x_a'}{2} e^{\gamma c_g'} \tag{17}$$

Unošenjem dobivenih vrednosti kao i brzine prostiranja talasa C iz jedn. (16) u jedn. (15), dobijamo rešenje našeg sistema

$$\begin{aligned} x &= x_a \cosh \gamma(c-c_g) \cos\gamma[a - (C-\bar{u})t], \quad \gamma = 2\pi : \ell, \quad \gamma C = 2\pi\nu \\ z &= x_a \sinh \gamma(c-c_g) \sin\gamma[a - (C-\bar{u})t], \quad c - c_g > 0 \end{aligned} \tag{18}$$

$$p = \bar{\varrho}\, x_a\left[\gamma(C-\bar{u})^2 \cosh\gamma(c-c_g) - g\sinh\gamma(c-c_g)\right]\sin\gamma[a-(C-\bar{u})t]$$

$$\begin{aligned} x' &= x_a' \cosh \gamma(c'-c_g') \cos\gamma[a' - (C-\bar{u}')t] \\ z' &= x_a' \sinh \gamma(c'-c_g') \sin\gamma[a' - (C-\bar{u}')t] \quad c'-c_g' < 0 \end{aligned} \tag{18'}$$

$$p' = \bar{\varrho}'\, x_a'\left[\gamma(C-\bar{u}')^2 \cosh\gamma(c'-c_g') - g\sinh\gamma(c'-c_g')\right]\sin\gamma[a'-(C-\bar{u}')t]$$

gde smo uzeli u obzir da je prema definiciji hiperboličnih funkcija

$$\sinh\varepsilon = \frac{e^{\varepsilon} - e^{-\varepsilon}}{2} \quad \text{i} \quad \cosh\varepsilon = \frac{e^{\varepsilon} + e^{-\varepsilon}}{2} \tag{19}$$

hiperbolični sinus odn. kosinus argumenta ε.

Na graničnoj površini $c = c' = c_o$ između donjeg i gornjeg sloja važi mešoviti granični uslov 2° (10) koji u našem slučaju ($\frac{\partial \bar{p}'}{\partial b'} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial b} = 0$) glasi

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(p-p') - (\bar{u}-\bar{u}')\left(\frac{\partial p'}{\partial a'} + g\bar{\varrho}'\frac{\partial z'}{\partial a'}\right) + g\bar{\varrho}'\left(\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z'}{\partial t}\right) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial t}(p-p') - (\bar{u}-\bar{u}')\left(\frac{\partial p}{\partial a} + g\bar{\varrho}\frac{\partial z}{\partial a}\right) + g\bar{\varrho}\left(\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z'}{\partial t}\right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{za } \bar{\vec{r}} + \vec{r} = \bar{\vec{r}}' + \vec{r}') \tag{20}$$

Pre nego što unesemo gornje vrednosti (18) i (18') u ovaj uslov, pisaćemo zbog jednostavnosti

$$(21)\qquad B_1 = x_a \sinh\gamma(c_o - c_g)$$
$$B_2 = \bar{\varrho} x_a \left[\gamma(C - \bar{u})^2 \cosh\gamma(c_o - c_g) - g \sinh\gamma(c_o - c_g)\right]$$

Jednake oznake samo sa crticom upotrebićemo i za odgovarajuće vrednosti za gornji vazduh.

Unošenjem rešenja (18) i (18') u granični uslov (20) dobijamo još sledeće dve uslovne jednačine

$$(22)\qquad (C - \bar{u})\left[B_2 - B_2' + g\bar{\varrho}' (B_1 - B_1')\right] = 0$$
$$(C - \bar{u}')\left[B_2 - B_2' + g\bar{\varrho} (B_1 - B_1')\right] = 0$$

koje su ispunjene ako je

$$(23)\qquad B_1 = B_1' \qquad \text{i} \qquad B_2 = B_2'$$

U specijalnom slučaju mogu se talasi ili u donjem ($C - \bar{u} = 0$) ili u gornjem vazduhu ($C - \bar{u}' = 0$) da prostiru jednakom brzinom kojom struji vazduh (donji odn. gornji vazduh se kreće kao čvrsto telo).

Deljenjem druge jedn. (21) sa prvom, kad uzmemo u obzir vrednosti (23), dobijamo

$$(24)\qquad \bar{\varrho}\left[\gamma(C - \bar{u})^2 \operatorname{ctgh}\gamma(c_o - c_g) - g\right] =$$
$$\bar{\varrho}' \left[-\gamma(C - \bar{u}')^2 \operatorname{ctgh}\gamma(c_g' - c_o) - g\right]$$

Jedn. (18) i (18') zajedno sa dobivenom jedn. (24) pretstavljaju konačno rešenje našeg problema.

Ako pišemo

$$(25)\qquad K = \operatorname{ctgh}\gamma(c_o - c_g) \quad \text{i} \quad K' = -\operatorname{ctgh}\gamma(c_o - c_g') = \operatorname{ctgh}\gamma(c_g' - c_o)$$

dobijamo iz jedn. (24) za brzinu prostiranja talasa

$$(26)\qquad C = \frac{\bar{\varrho}\,\bar{u}K + \bar{\varrho}'\bar{u}'K'}{\bar{\varrho}K + \bar{\varrho}'K'} \pm \sqrt{\frac{g\ell}{2\pi}\,\frac{\bar{\varrho} - \bar{\varrho}'}{\bar{\varrho}K + \bar{\varrho}'K'} - \bar{\varrho}\,\bar{\varrho}'KK'\left(\frac{\bar{u}' - \bar{u}}{\bar{\varrho}K + \bar{\varrho}'K'}\right)^2}$$

Iz iste jedn. (24), kad uzmemo u obzir da je u saglasnosti sa jdn. (16) i (11),

$$(27)\qquad \gamma(C - \bar{u}) = 2\pi\left(\nu - \frac{\bar{u}}{\ell}\right) \qquad \text{i} \qquad \gamma(C - \bar{u}') = 2\pi\left(\nu - \frac{\bar{u}'}{\ell}\right)$$

dobijamo jednačinu za učestanost, (25), (10),

$$(28)\qquad \bar{\varrho}\left[2\pi\ell\left(\nu - \frac{\bar{u}}{\ell}\right)^2 K - g\right] = \bar{\varrho}'\left[-2\pi\ell\left(\nu - \frac{\bar{u}'}{\ell}\right)^2 K' - g\right]$$

4. Stabilni talasi na graničnim površinama

Ovde ćemo rešenje iz prethodnog odeljka kratko tumačiti. Nećemo se ograničiti samo na posmatranje talasanja granične površine pod gornjim uslovima, što je moguće tada kada je koren iz (26) realan,

već ćemo posmatrati opšte osobine strujnog polja u oblasti gde se granična površina talasa.

Iz jedn. 3 (18) i 3 (18') možemo dobiti jednačine trajektorija i strujnica u posmatranom polju strujanja.

U relativnom sistemu, koji se zajedno sa osnovnom strujom brzinom $\overline{u}$ kreće u pravcu ose a, nam x i z pretstavljaju otstojanja delića a,b,c u horizontalnom pravcu a odn. vertikalnom pravcu c od tačke $A(a+\overline{u}t,b,c)$. Eliminacijom vremena t iz prve i druge jednačine 3 (18) (za sada su naša posmatranja ograničena na donji sloj) dobijamo trajektoriju kojom se u tom sistemu kreće delić a,b,c:

(1) $$\frac{x^2}{x_1^2} + \frac{z^2}{z_1^2} = 1$$

gde je

(2) $$x_1 = x_a \cosh\gamma(c-c_g) \quad \text{i} \quad z_1 = x_a \sinh\gamma(c-c_g)$$

U saglasnosti sa definicijom hiperboličnih funkcija je

(3) $$x_1 \geqq z_1$$

(znak jednakosti odnosi se na slučaj beskonačno debelog sloja, $c_g = -\infty$) i

(4) $$x_1^2 - z_1^2 = x_a^2$$

Prema tome su trajektorije elipse odn., u slučaju beskonačno debelog sloja, krugovi sa poluprečnikom $x_1 = z_1$. Osa svake takve elipse leži horizontalno a međusobno otstojanje žiža je $2x_a$. Sa dubinom odnos male ose prema velikoj se smanjuje i pri dnu $(c = c_g)$ svaki delić osciliše duž horizontalne linije dužine $2x_a$. Prema učinjenim pretpostavkama, naše rešenje pretstavlja srazmerno mala poremećenja. Zbog toga treba u saglasnosti sa jedn. (18) da izaberemo to manje x_a što veća je dubina sloja $|c_g|$.

Iz jedn. 3 (18), kad uzmemo u obzir jedn. (2), vidimo da je u relativnom sistemu x,y,z (za posmatrača koji se kreće sa osnovnom strujom brzinom $\overline{u}$) vektor brzine delića a,b,c

(5) $$\vec{u} = \gamma(C-\overline{u})\left(\frac{x_1}{z_1}z,\ 0,\ -\frac{z_1}{x_1}x\right)$$

Jer je

(6) $$\text{rot}\,\vec{u} = \left(0, \gamma(C-\overline{u})\left(\frac{x_1}{z_1} + \frac{z_1}{x_1}\right), 0\right)$$

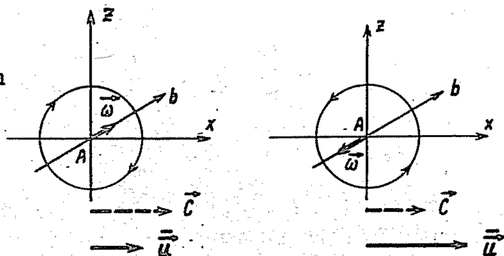
to vidimo da makoji delić a,b,c rotira konstantnom ugaonom brzinom

(7) $$\omega = \frac{\gamma}{2}(C-\overline{u})\left(\frac{x_1}{z_1} + \frac{z_1}{x_1}\right)$$

oko ose koja je paralelna osi b i ide kroz tačku A.

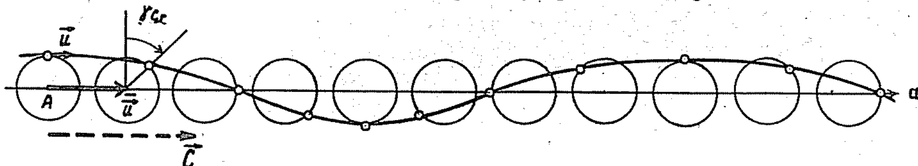
Količnik $x_1 : z_1$ je pozitivan. Ako je zbog toga brzina prostira-

nja talasa C veća (sl. 62) odn. manja od brzine osnovne struje $\overline{u}$, onda, gledajući u pravcu ose b, delići rotiraju u negativnom odn. pozitivnom smislu. Ako je $C = \overline{u}$, onda su delići u odnosu na posmatrača koji se u pravcu ose a kreće brzinom $\overline{u}$ u stanju mirovanja. Čitav sloj sa površinom sinusoidalnog oblika kreće se brzinom $\overline{u}$ kao čvrsto telo. Isti je smisao rotacije i u gornjem vazduhu.



Sl. 62 Smisao rotacije vazduha

Posmatrano sa tačke gledišta posmatrača koji je u stanju mirovanja, svaki delić vazduha a,b,c, ukoliko nije $C = \overline{u}$, nalazi se čas iznad, čas ispod linije c = const. Brzina delića jednaka je zbiru iz brzine tačke A oko koje delić rotira, tj. iz brzine $\overline{u}$, i relativne brzine (6). Trajektorija jednog delića u apsolutnom sistemu za slučaj beskonačno dubokog sloja prikazana je na sl. 64.



Sl.63. Izgled trajektorije u apsolutnom sistemu

Ovakvo kretanje vazdušnih delića u vezi je sa talasanjem čitave atmosfere:

Strujno polje u makom datom trenutku vremena možemo sebi najbolje pretstaviti strujnicama.

U trenutku vremena t ima svaki delić a,b,c neku određenu relativnu brzinu (5). Brzina se od delića do delića menja, tako da je raspored brzine u prostoru prosto funkcija označavajućih koordinata a,b,c, tj. zapravo samo koordinata a,c, jer se u pravcu b ne vrši nikakvo kretanje. U saglasnosti sa definicijom strujnice (str.124) i jedn. 3 (8) diferencijalna jednačina strujnice za polje relativne brzine (5), pod pretpostavkom da $C \neq \overline{u}$, glasi

$$\frac{da}{\cosh\gamma(c-c_g)\,\sin\gamma[a-(C-\overline{u})t]} = \frac{dc}{-\sinh\gamma(c-c_g)\,\cos\gamma[a-(C-\overline{u})t]}$$

Ako uzmemo u obzir da je

$$\int \mathrm{ctgh}\,\gamma(c-c_g)\,dc = \frac{1}{\gamma}\ln\sinh\gamma(c-c_g)$$

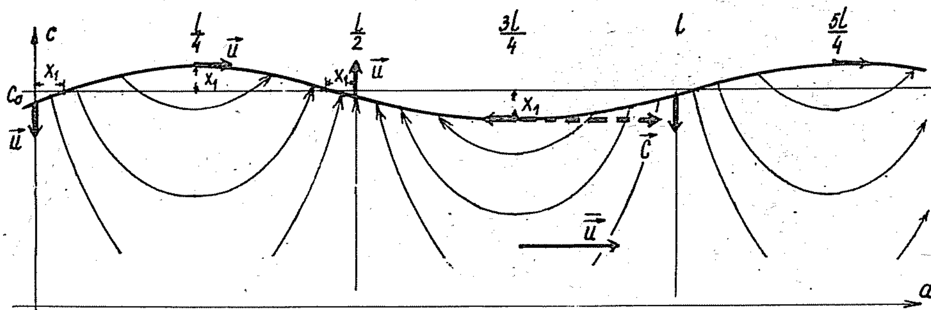
dobijamo odavde jednačinu strujnice u relativnom sistemu

$$\sinh\gamma(c-c_g)\,\sin\gamma\left[a-(C-\overline{u})t\right] = \mathrm{const}, \quad c-c_g>0 \tag{8}$$

Odavde lako dobijamo i nagib strujnice prema osi a

$$(9)\qquad tg\psi = \frac{dc}{da} = -\ tgh\gamma(c - c_g)\ ctg\gamma\left[a - (C-\bar{u})t\right] \qquad \gamma = \frac{2\pi}{\ell}$$

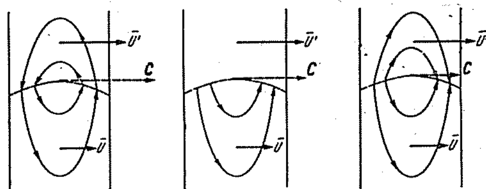
Vidimo da je napr. u vremenu $t = 0$ nagib $tg\psi = \infty$ svuda tamo gde je $a = 0, \frac{\ell}{2}, \frac{2\ell}{2}, \ldots$ i da je tada $tg\psi = 0$ na mestima gde je $a = \frac{\ell}{4}, \frac{3\ell}{4}, \frac{5\ell}{4}, \ldots$ U tom trenutku vremena je dalje $tg\psi < 0$ svuda tamo gde je $0 < a < \frac{\ell}{4}$, $\frac{2\ell}{4} < a < \frac{3\ell}{4}$ itd a $tg\psi > 0$ na mestima gde je $\frac{\ell}{4} < a < \frac{2\ell}{4}$, $\frac{3\ell}{4} < a < \frac{4\ell}{4}$ itd.(sl. 64). Iz ovog proizlazi da strujnice liče na parabole. One su konkavno parabiličnog tipa (gledano od gore) sa temenima u tačkama koje leže na vertikalnim li-



Sl. 64. Unutrašnja granična površina i strujno polje u donjem vazduhu u relativnom sistemu

nijama $a = \frac{\ell}{4}$, $a = \frac{3\ell}{4}, \ldots$. Za strujnice su vertikalne linije $a = 0$, $a = \frac{2\ell}{4}$, $a = \frac{4\ell}{4}, \ldots$ asimptote. To su jednovremeno strujne linije i na njima vazduh struji naizmenično nadole i nagore. Slika strujnog polja nepromenjena se premešta brzinom prostiranja talasa C u pravcu ose a.

Potpuno slično izgleda strujno polje i iznad granične površine c_o = const. Pošto je tamo argument funkcije sinh negativan, to su za razliku od pre, ukoliko nije $C = \bar{u}'$, strujnice konveksno paraboličnog tipa. Vidimo da su i ovde $a' = 0$, $a' = \frac{2\ell}{4}$, $a' = \frac{4\ell}{4}, \ldots$ vertikalne strujnice. Za slučaj da je $\bar{u}' > \bar{u}$ je prikazano relativno strujno polje iznad i spod grebena talasa na unutrašnjoj graničnoj površini na sl. 65.



Sl 65. Strujnice (u odnosu na osnovna strujanja) stabilnog unutrašnjeg talasa pri različitim brzinama prostiranja

Kakav je izgled granične površine c_0 = const (koja je prikazana na slici 64) vidimo na sledeći način:

U datom trenutku vremena t makoji delić a, b, c_0 koji se nalazi na unutrašnjoj graničnoj površini ima koordinate

$$\overline{x} + x = a + \overline{u}t + x, \quad \overline{y} + y = b, \quad \overline{z} + z = c_0 + z$$

gde su x i z vrednosti iz jedn. 3 (18). Kojom relativnom brzinom se kreće vazduh na površini daje nam jedn. (5). Tako je napr. za beskonačno dubok sloj ($x_1 = z_1$) pri t = 0 i za

$a =$	0	$\frac{\ell}{4}$	$\frac{2\ell}{4}$	$\frac{3\ell}{4}$	$\frac{4\ell}{4}$	$\frac{5\ell}{4}$	$\frac{6\ell}{4}\ldots$
$\overline{x}+x =$	$0+x_1$	$\frac{\ell}{4}+0$	$\frac{2\ell}{4}-x_1$	$\frac{3\ell}{4}+0$	$\frac{4\ell}{4}+x_1$	$\frac{5\ell}{4}+0$	$\frac{6\ell}{4}-x_1\ldots$
$z =$	0	x_1	0	$-x_1$	0	x_1	$0\ldots$
$u =$	0	$\gamma(C-\overline{u})x_1$	0	$-\gamma(C-\overline{u})x_1$	0	$\gamma(C-\overline{u})x_1$	$0\ldots$
$w =$	$-\gamma(C-\overline{u})x_1$	0	$\gamma(C-\overline{u})x_1$	0	$-\gamma(C-\overline{u})x_1$	0	$\gamma(C-\overline{u})x_1\ldots$

Ovde smo uzeli u obzir da je u saglasnosti sa jedn. 3 (10) $\frac{\ell}{4} = \frac{\pi}{2\gamma}$. Ovi podaci su uzeti u obzir prilikom crtanja slike 64.

Brzina prostiranja talasa na samoj unutrašmjoj graničnoj površini zavisi od raznih faktora, među ostalim i od talasne dužine ℓ pojavljenih talasa, 3 (26). Kao što vidimo iz jedn. 3 (26) brzina prostiranja C se u opštem slučaju sastoji iz dva dela, iz <u>konvektivnog</u> i <u>dinamičkog</u>. Dinamički deo može da bude i pozitivan i negativan. To znači da se poremećenja koja se na nekom mestu periodično ponavljaju prostiru od mesta postanka na jednu i drugu stranu u pravcu ose a i time izazivaju talasanje vazduha ispred i iza mesta poremećenja. Gore smo tumačili samo jedne talase.

Konvektivni deo je neka sredina iz brzine hladnog i toplog vazduha. Dinamični deo sastoji se iz dva dela, iz jednog koji zavisi od zemljine teže (faktor g) i drugog koji je posledica inercije $(\overline{u}' - \overline{u})^2 : 2$ = kinetička energija). U opštem slučaju se prema tome rešenje 3 (18), 3 (18') odnosi na talase sa gravitacionom potencijalnom i kinetičkom energijom prostiranja. Pošto se prilikom prostiranja amplituda talasa ne menja, talasi ove vrste su <u>stabilni</u>.

U svrhu daljeg tumačenja obrasca 3 (26) posmtraćemo sledeće posebne slučajeve:

1. Donji sloj je dole a gornji gore neograničen ($c_g \to -\infty$, $c_g' \to +\infty$). U tom slučaju je K = K' = 1 i

$$C = \frac{\overline{\varrho}\,\overline{u} + \overline{\varrho}'\overline{u}'}{\overline{\varrho} + \overline{\varrho}'} \pm \sqrt{\frac{g\ell}{2\pi}\,\frac{\overline{\varrho} - \overline{\varrho}'}{\overline{\varrho} + \overline{\varrho}'} - \overline{\varrho}\,\overline{\varrho}'\left(\frac{\overline{u} - \overline{u}'}{\overline{\varrho} + \overline{\varrho}'}\right)^2} \tag{10}$$

I ovde ima nekoliko posebnih slučajeva:

a. Iznad nestišljive tečnosti, napr. vode, neka se ne nalazi ništa ili sloj sa malom gustinom u poređenju sa gustinom donje tečnosti (napr. vazduh iznad vode). U tom slučaju je $c = c_0$ <u>slobodna površina</u> na kojoj se talasi prostiru brzinom

$$(11) \qquad C = \bar{u} \pm \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

To je poznati Stokes-ov obrazac za duboku vodu. Talasi ove vrste nastaju samo pod dejstvom sile zemljine teže i zovu se čisti gravitacioni talasi na slobodnoj površini. Ako je tečnost u stanju mirovanja ($\bar{u} = 0$), onda je brzina čistih gravitacionih talasa srazmerna kvadratnom korenu iz talasne dužine i ubrzanja teže. Brzina prostiranja gravitacionih talasa nezavisna je od gustine tečnosti.

b. U neporemećenom stanju je atmosfera u stanju mirovanja ($\bar{u} = \bar{u}' = 0$). U tom slučaju je

$$(12) \qquad C = \pm\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\,\frac{\bar{\varrho} - \bar{\varrho}'}{\bar{\varrho} + \bar{\varrho}'}} = \pm\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\,\frac{\bar{T}' - \bar{T}}{\bar{T}' + \bar{T}}}$$

Brzina C je realna samo pod uslovom da je $\bar{\varrho} > \bar{\varrho}'$ i time $\bar{T}' > \bar{T}$. Ovi talasi su čisti gravitacioni na unutrašnjoj površini. Brzina C je osetno manja nego pre i to

$$\sqrt{\frac{\bar{T}' + \bar{T}}{\bar{T}' - \bar{T}}} \text{ puta.}$$

Ako je gornji vazduh gušći od donjeg, talasi ove vrste ne postoje.

c. Samo donji sloj je u stanju mirovanja. U tom slučaju je

$$(13) \qquad C = \frac{\bar{\varrho}'\bar{u}'}{\bar{\varrho}' + \bar{\varrho}} \pm \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\,\frac{\bar{T}' - \bar{T}}{\bar{T}' + \bar{T}} - \frac{\bar{T}'\bar{T}\bar{u}'^2}{(\bar{T}' + \bar{T})^2}}$$

Ako se gustina gornje tečnosti ne razlikuje mnogo od donje, onda je konvektivni deo praktično jednak polovini brzine kojom struji gornji vazduh. Za razliku od dosadašnjih slučajeva jedan deo energije ovih talasa potiče od kinetičke energije osnovnog strujanja. I ovi talasi **ne mogu** da postoje kada je gornji vazduh hladniji (gušći) od donjeg. U tom slučaju je prvi član ispod korena negativan. Član koji potiče od inercije, tj. drugi član ispod korena, uvek je negativan.

2. Iznad donjeg sloja konačne debljine neka se nalazi beskonačno debeo sloj.

a. U početku je jedna i druga tečnost u stanju mirovanja. U tom slučaju je

$$(14) \qquad C = \pm\sqrt{\frac{g\ell}{2\pi}\,\frac{\bar{\varrho} - \bar{\varrho}'}{\bar{\varrho}K + \bar{\varrho}'}}$$

b. Ako je pored toga dubina sloja $c_o - c_g$ u poređenju sa talasnom dužinom λ mala, onda možemo praktično pisati

$$K = \operatorname{ctgh}\frac{2\pi}{\ell}(c_o - c_g) = \frac{\ell}{2\pi\,(c_o - c_g)}$$

Zbog toga je u tom slučaju

$$(15) \qquad C = \pm\sqrt{g(c_o - c_g)\,\frac{\bar{\varrho} - \bar{\varrho}'}{\bar{\varrho}}\,\frac{\bar{\varrho}\,\ell}{\bar{\varrho}\,\ell + 2\pi\bar{\varrho}'(c_o - c_g)}}$$

c. Ako je i gustina gornje tečnosti u poređenju sa gustinom donjeg sloja mala (napr. vazduh iznad vode), onda je

$$C = \pm\sqrt{g(c_o - c_g)} \qquad (16)$$

Time smo dobili poznatu Lagrange-ovu brzinu prostiranja tzv. dugih talasa na plitkoj vodi. Ova brzina ništa ne zavisi od talasne dužine i jednaka je brzini kojom bi palo telo sa visine koja je dva puta manja od debljine sloja.

Na kraju dajemo još dve tablice. Prva nam daje brzinu prostiranja talasa na slobodnoj površini ($\bar{\varrho}' = 0$) pod uslovom da je na početku tečnost u stanju mirovanja (vrednosti su dobivene pomoću jedn. (14)). Druga nam daje brzine prostiranja na unutrašnjoj površini izračunane po obrascu (15).

Brzina prostiranja gravitacionih talasa

$c_o - c_g$ \ ℓ =	1	10	100	500	1000	5000	10000	∞ (Lagrange) m
1m	1	3	3	3	3	3	3	3
10	1	4	9	10	10	10	10	10
100	1	4	12	26	29	31	31	31
1000	1	4	12	28	39	81	99	99
10 000	1	4	12	28	39	88	295	313
(Stokes)	1	4	12	28	39	88	394	∞ m/sec

Brzina prostiranja unutrašnjih gravitacionih talasa

$c_o - c_g$ \ $\dfrac{\bar{\varrho} - \bar{\varrho}'}{\bar{\varrho}} = \dfrac{\bar{T}' - \bar{T}}{\bar{T}'}$	0,001	0,002	0,005	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	1 (Lagrange)
0m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1	2	3
10	0	0	1	1	1	2	3	5	7	10
100	1	1	2	3	4	7	10	14	22	31
1000	3	4	7	10	14	22	31	45	70	99
10 000	10	14	22	31	45	70	99	142	221	313 m/sec

5. Nestabilni talasi na graničnim površinama

U prethodnom odeljku proučavali smo stabilne talase, tj. talase sa svuda i uvek jednakom amplitudom. Oni se pod datim uslovima javljaju tada kada izraz pod korenom jedn. 3 (26) za brzinu prostiranja talasa C nije negativan. Kada pak taj uslov nije ispunjen, i C je kompleksno, na površini se javljaju talasi čija se amplituda, kao što ćemo odmah videti, u toku vremena smanjuje ili povećava. To su prigušeni ili nestabilni talasi.

Ako je C kompleksno, onda je i rešenje 3 (18), 3 (18') kompleksno. Pošto je naš sistem diferencijalnih jednačina linearan, to svaka komponenta za sebe, realna i kompleksna, pretstavlja opet jedno rešenje. Ako, prema tome, realna komponenta rešenja zadovoljava sve naše uslove, onda ona pretstavlja traženo rešenje pod datim uslovima.

Realnu komponentu rešenja 3 (18), 3 (18') dobijamo kad prvo uzmemo u obzir da je

$$\cos(a-bi) = \cos a \cos bi + \sin a \sin bi = \frac{e^b+e^{-b}}{2}\cos a - \frac{e^b-e^{-b}}{2i}\sin a$$
(1)
$$\sin(a-bi) = \sin a \cos bi - \cos a \sin bi = \frac{e^b+e^{-b}}{2}\sin a + \frac{e^b-e^{-b}}{2i}\cos a$$

Na taj način dobijamo napr. iz 3 (18) za realnu komponentu pomaka x:

$$x = x_a \cosh \gamma(c-c_g)\frac{e^{\gamma C_2 t}+e^{-\gamma C_2 t}}{2}\cos\gamma\left[a-(C_1-\bar{u})t\right]$$

gde su C_1 i C_2 realna odn. imaginarna komponenta brzine C iz 3 (26):

(2) $C_1 = \dfrac{\bar{\varrho}\bar{u}K + \bar{\varrho}'\bar{u}'K'}{\bar{\varrho}K + \bar{\varrho}'K'}$ i $C_2 = \sqrt{\bar{\varrho}\bar{\varrho}'KK'\left(\dfrac{\bar{u}'-\bar{u}}{\bar{\varrho}K+\bar{\varrho}'K'}\right)^2 - \dfrac{gL}{2\pi}\dfrac{\bar{\varrho}-\bar{\varrho}'}{\bar{\varrho}K+\bar{\varrho}'K'}}$

Na sličan način dobijamo i vrednosti za z i p kao i za poremećaje u gornjem vazduhu. Vidimo da se svaka realna komponenta sastoji opet iz dva dela. Jedan pretstavlja nestabilne, a drugi prigušene talase. Ovde nas interesuju nestabilni talasi, tj. oni kojima se amplituda u toku vremena povećava. U tom slučaju naše rešenje sistema jedn. 3 (3) i analognog za gornji vazduh glasi

$$x = x_a e^{\gamma C_2 t}\cosh\gamma(c-c_g)\cos\gamma\left[a-(C_1-\bar{u})t\right] \qquad C_2 > 0$$
(3)
$$z = x_a e^{\gamma C_2 t}\sinh\gamma(c-c_g)\sin\gamma\left[a-(C_1-\bar{u})t\right]$$
$$\bar{\alpha}p = x_a e^{\gamma C_2 t}\Big\{2\gamma C_2(C_1-\bar{u})\cosh\gamma(c-c_g)\cos\gamma\left[a-(C_1-\bar{u})t\right] - \Big(\gamma\left[C_2^2-(C_1-\bar{u})^2\right]\cosh\gamma(c-c_g)+g\sinh\gamma(c-c_g)\Big)\sin\gamma\left[a-(C_1-\bar{u})t\right]\Big\}$$

$$x' = x_a' e^{\gamma C_2 t}\cosh\gamma(c'-c_g')\cos\gamma\left[a'-(C_1-\bar{u}')t\right]$$
(3')
$$z' = x_a' e^{\gamma C_2 t}\sinh\gamma(c'-c_g')\sin\gamma\left[a'-(C_1-\bar{u}')t\right]$$
$$\bar{\alpha}'p' = x_a' e^{\gamma C_2 t}\Big\{2\gamma C_2(C_1-\bar{u}')\cosh\gamma(c'-c_g')\cos\gamma\left[a'-(C_1-\bar{u}')t\right] - \Big(\gamma\left[C_2^2-(C_1-\bar{u}')^2\right]\cosh\gamma(c'-c_g')+g\sinh\gamma(c'-c_g')\Big)\sin\gamma\left[a'-(C_1-\bar{u}')t\right]\Big\}$$

Ovde su x_a i x_a' odgovarajuće integracione konstante koje u sebi sadrže i faktor $\frac{1}{2}$.

Na sličan način kao ranije dobijamo jednačinu strujnice u relativnom sistemu (str. 201). Za donji sloj ona glasi

(4) $$e^{\gamma C_2 t}\sinh\gamma(c-c_g)\Big\{C_2\cos\gamma\left[a-(C_1-\bar{u})t\right] + (C_1-\bar{u})\sin\gamma\left[a-(C_1-\bar{u})t\right]\Big\} = \text{const}$$

Ako pišemo

$$C_2 = A\sin\gamma a_o \qquad \text{i} \qquad (C_1-\bar{u}) = A\cos\gamma a_o$$

gde je

(5) $$A = \sqrt{C_2^2 + (C_1-\bar{u})^2} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\gamma a_o = \frac{C_2}{C_1-\bar{u}}$$

vidimo da možemo izraz u velikoj zagradi pisati u obliku

$$A \sin\gamma\left[a_o + a - (C_1 - \bar{u})t\right]$$

i da je zbog toga strujno polje potpuno slično kao u donjem sloju kod stabilnih talasa. Razlika je samo u tome da je cela slika tamo proučenog polja (sl. 64) pomaknuta za a_o ulevo (kada je $C_1-\bar{u}>0$) odn. udesno ($C_1-\bar{u}<0$).

I izgled granične površine $c = c_o$ potseća na onu za stabilne talase (sl. 64). Amplituda je i ovde u svakom trenutku vremena svuda u polju jednaka. Za razliku od pre, amplituda se ovde u toku vremena eksponencijalno povećava.

U saglasnosti sa jedn. (2) možemo pisati

$$C_1 = \bar{u} + \frac{(\bar{u}' - \bar{u})\bar{\varrho}' K'}{\bar{\varrho}K + \bar{\varrho}'K'} = \bar{u}' - \frac{(\bar{u}' - \bar{u})\bar{\varrho}K}{\bar{\varrho}K + \bar{\varrho}'K'} \qquad \begin{matrix} K > 0 \\ K' > 0 \end{matrix}$$

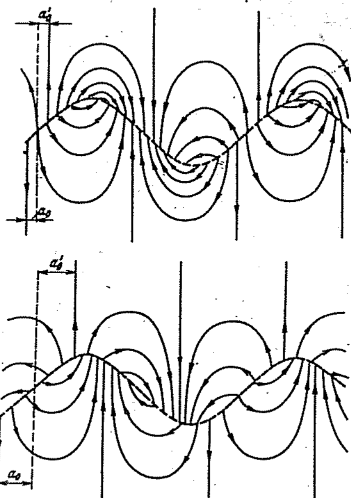
Odavde vidimo da je

$$\bar{u} \lesseqgtr C_1 \lesseqgtr \bar{u}' \qquad \text{kada je} \qquad \bar{u} \lesseqgtr \bar{u}'$$

da ima dakle C_1 neku vrednost koja uvek leži između $\bar{u}$ i $\bar{u}'$.

Očigledno se slično kao donji ponaša i gornji sloj vazduha. Izgled strujnog polja u odnosu na osnovna strujanja za slučaj da je $\bar{u} < C_1 < \bar{u}'$ prikazuje nam slika 66. Iz jedn. (5) vidimo da se sa povećavanjem nestabilnosti (sa C_2) pomak a_o povećava. U slučaju beskonačno velike nestabilnosti je $a_o = \frac{\pi}{2\gamma} = \frac{\ell}{4}$ i $a_o' = -\frac{\pi}{2\gamma} = -\frac{\ell}{4}$. To je npr. slučaj pri <u>statičkoj nestabilnosti</u>, a to je tada kada su oba sloja u stanju mirovanja a gornji sloj je gušći od donjeg. Tada je $C_1 = 0$

Kao što vidimo iz jedn. (3), (3') i (2) stepen nestabilnosti zavisi od više činioca. Ukoliko je gornji sloj ređi, to smanjuje nestabilnost. Ako uzmemo da je $g = 0$ (ne nalazimo se u polju gravitacije), onda postoje samo <u>čisti inercioni talasi</u> koji su uvek nestabilni i koji se prostiru kao svi nestabilni talasi konvektivnom brzinom C_1. Skok u brzini $\bar{u}' - \bar{u}$ uvek povečava nestabilnost. Takvi talasi crpe energiju iz kinetičke energije osnovnog strujanja, koje je nestabilno. To je najjednostavniji primer <u>dinamičke nestabilnosti</u>.

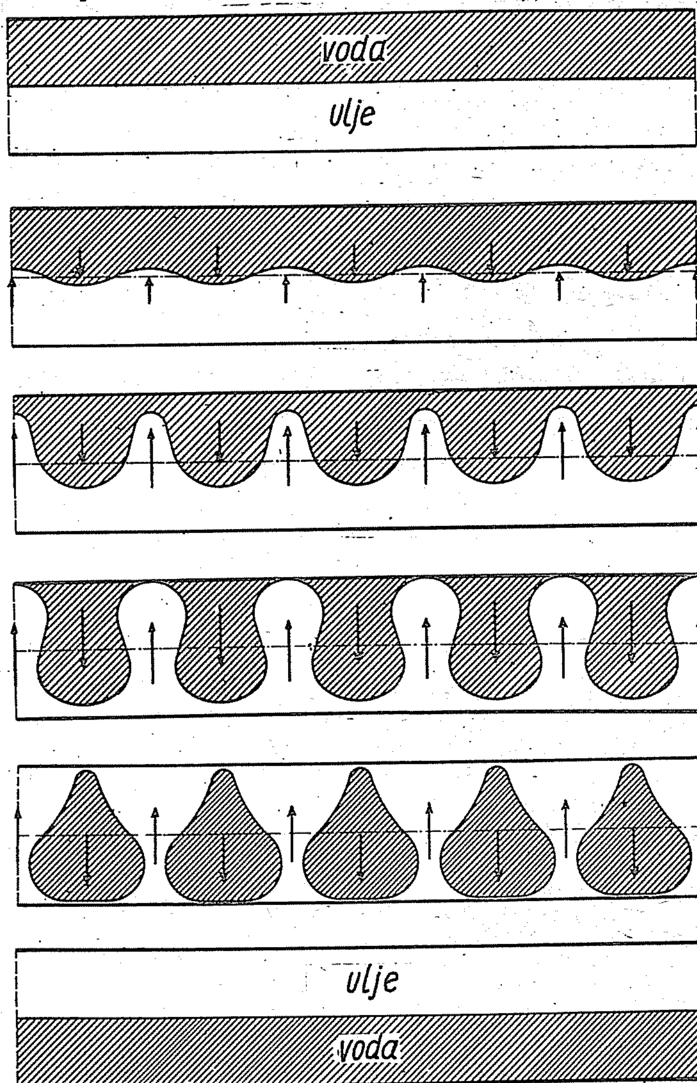


Sl.66. Strujnice (u odnosu prema osnovnim strujanjima) za nestabilni unutrašnji talas

Kao primer statičke nestabilnosti neka nam posluži sledeći eksperiment (D. Avsec, 1939):

U zatvorenom sudu nalazi se iznad vode ulje. Obe tečnosti su

na početku u stanju mirovanja. Posle brzog preokreta voda, kao gušća tečnost, bila je stavljena u nestabilan položaj iznad ulja i to tako da je ležala unutrašnja granična površina horizontalno (sl. 67). Na početku odmah posle prevrtanja bile su obe tečnosti



Sl. 67. Nekoliko karakterističnih faza prilikom premeštanja vode i ulja iz nestabilnog u stabilan položaj

u stanju mirovanja ($\overline{u} = \overline{u}' = 0$). Odmah posle toga pojavili su se talasi na granici između obe tečnosti sa amlitudama koje su se brzo u toku vremena povećavale, što je dovelo do obrazovanja velikih kaplji vode koje su se slile brzo u sloj vode koji je na kraju mirno ležao ispod ulja.

Taj primer pretstavlja nešto drukčije rešenje od našeg, jer se obrazuju kaplje, što znači da se poremećenja vrše i u pravcu a i u pravcu b. U tom slučaju trebalo bi u traženju teorijskog rešenja polaziti od jednačina 3 (3) proširenih sa komponentama u pravcu b. Rešenje bismo našli u obliku

$$f(t)\,\varphi(c)\sin(\gamma a + \delta t)\sin(\gamma_1 b + \delta_1 t)$$

i sličnom. Time bismo dobili kao rešenje celularna kretanja, koja su bila predmet proučavanja, eksperimentalnih i teorijskih, mnogo istraživača (H. Bénard, H. Jeffreys, Lord Rayleigh, D. Avsec i dr.).

Primena teorije celularnih kretanja u meteorologiji je svestrana.

6. Kompresioni talasi u atmosferi

Iz teorije elastičnosti je poznato da se u svakoj izotropnoj sredini prostiru bezbrojni elastični talasi koji su u čvrstim telima dvojake prirode. Pored transverzalnih tamo postoje i longitudinalni talasi. Kod transverzalnih talasa delići materije kreću se parcijalnim brzinama izazvanim ovim talasima normalno na prostiranje talasa. Kod longitudinalnih talasa ova kretanja vrše se u pravcu prostiranja talasa. U homogenim gasovima i tečnostima postoje samo longitudinalni ili, kao što se oni danas nazivaju kompresioni talasi (str. 185).

Atmosfera je sredina u kojoj se prostiru bezbrojni kompresioni talasi u svim mogućim pravcima. Sa te strane danas je atmosfera vrlo malo proučena, tako da u tom pogledu očekuju meteorologiju još veliki zadaci. Danas se uglavnom smatra da su kompresioni talasi za probleme dinamičke meteorologije beznačajni Ali u radovima Neisa i Čadeža zastupa se suprotno gledište.

Ovde ćemo se ograničiti na posmatranje kretanja vazduha u oblasti početka koordinatnog sistema x,y,z gde neka se kretanja vrše samo adijabatski. Zamislićemo da se atmosfera nalazi u polju bez teže gde se ne javljaju ni sile trenja ni sila devijacije. Pretpostavljamo još da je osnovno stanje pretstavljeno atmosferom u stanju mirovanja ($\overline{u} = 0$) gde je gustina $\overline{\varrho}$ svuda jednaka.

U saglasnosti sa jedn. 1 (2) i 1 (3) važe u našem slučaju jednačine

(1) $$\overline{\varrho}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \overline{\varrho}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \overline{\varrho}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

(2) $$\overline{\varrho}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

Diferenciranjem prve jedn. (1) po x, druge po y i treće po z i sabiranjem dobijamo kad uzmemo u obzir jednačinu kontinuiteta (2)

(3) $$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} = \nabla^2 p$$

Pošto se kretanja vrše adijabatski, je svaka promena ϱ gustine $\bar{\varrho}$ na sledeći način u vezi sa jednovremenom promenom p pritiska $\bar{p}$ (X 4: (4) i (6))

(4) $$p = C_L^2 \varrho$$

gde je C_L Laplace-ova brzina zvuka. Kad ovo uzmemo u obzir u jedn. (3) koja se odnosi na autobarotropno polje dobijamo jednačinu

(5) $$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = C_L^2 \nabla^2 p$$

poznatu pod imenom <u>talasna jednačina</u>.

Zamislimo sada da se u atmosferi prostire sferni talas, npr. kao zgušnjenje, elementarne debljine $C_L dt$ brzinom zvuka C_L od izvorne tačke $T_1(x_1, y_1, z_1)$ radijalno upolje (sl. 68). Na mestu gde se talas prostire atmosferski pritisak je zbog ovog talasa povećan za (X-4(3))

(6) $$\delta_1 p = \bar{\varrho} C_L u_1$$

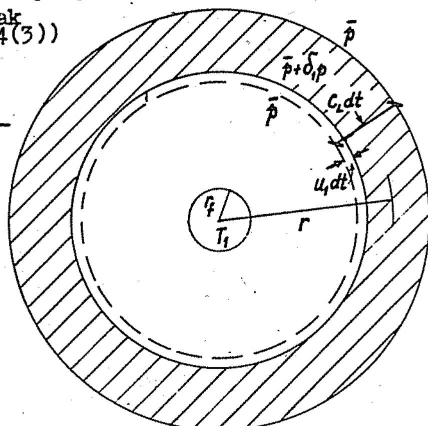
(u_1 = parcijalna brzina koju prouzrokuje posmatrani talas). Ovaj talas neka se u trenutku vremena t nalazi između dve koncentrične lopte sa poluprečnicima

$$r - \frac{C_L\, dt}{2} \quad \text{i} \quad r + \frac{C_L\, dt}{2}$$

gde je

(7) $$r = r_f + C_L(t - t_1) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

(x,y,z = koordinate tačke T koja se nalazi magde na lopti sa poluprečnikom r i centrom u tačci T_1, t_1 = vreme kada je bilo $r = r_f$).



Sl. 68. Prostiranje sfernog talasa u atmosferi

Kao što ćemo da vidimo kasnije brzina u_1 a s njom i porast pritiska $\delta_1 p$ sa otstojanjem r pod našim uslovima linearno se smanjuje, tako da možemo pisati

(8) $$u_1 = \frac{r_f}{r} u_{1f} \qquad \text{i} \qquad \delta_1 p = \frac{r_f}{r} \delta_{1f} p$$

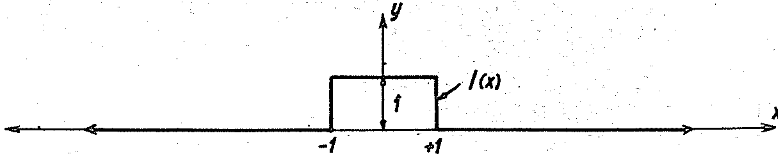
($u_{1f} = u_1$ i $\delta_{1f} p = \delta_1 p$ za $r = r_f$). Na svim ostalim, sem navedenim mestima atmosfera je u tom trenutku vremena zbog posmatranog elementarnog zgušnjenja potpuno neporemećena. Da bismo ovakvo stanje atmosfere sebi prikazali, potrebna nam je funkcija koja je različita od nule samo u nekom konačnom intervalu, a inače je svuda jednaka nuli. Takva, ili bolje rečeno približno takva, funkcija npr. argumenta x, je sledeća:

(9) $$I(x) = 2^{-x^{2n}}$$

Ovde je n ceo broj, veći od srazmerno velikog pozitivnog broja N. Očigledno je sa željenom tačnošću

(10)
$$\begin{aligned} I(x) &= 1 \quad \text{za} \quad |x| < 1 \\ I(x) &= 0{,}5 \quad \text{za} \quad |x| = 1 \\ I(x) &= 0 \quad \text{za} \quad |x| > 1 \end{aligned}$$

Funkcija I(x) prikazana je na slici 69. Već za srazmerno male vrednosti n uslovi (10) sa velikom tačnošću su ispunjeni. Tako je



Sl. 69. Grafički prikaz funkcije I(x)

napr. za n = 500

$$I(\pm 0{,}99) = 1{,}00000 - 0{,}00003$$

i

$$I(\pm 1{,}01) = 10^{-6300} = 0{,}000\ldots$$

Ako uzmemo u obzir osobine funkcije (9), vidimo da možemo poremećaj pritiska koji je u makom trenutku vremena t izazvan elementarnim impulsom koji sada posmatramo, a koji iznosi $\delta_1 p\, dt = \bar{\varrho} C_L \delta_1 r$ ($\delta_1 r$ = pomak izvršen pod dejstvom impulsa u intervalu vremena dt radijalno od tačke T_1 upolje), na sledeći način izraziti kao funkciju koordinata x,y,z:

(11) $$\delta_1 p = \bar{\varrho} C_L u_1 I\left\{\frac{2}{C_L\, dt}\left[r - r_f - C_L(t - t_1)\right]\right\}$$

Kad uzmemo u obzir jedn. (8), vidimo da možemo poremećaj pritiska (11) pisati u obliku

(12) $$\delta_1 p = \frac{A}{r} f\left[r - r_f - C_L(t - t_1)\right]$$

gde je A konstanta a f gore navedena funkcija argumenta $r - r_f - C_L(t - t_1)$, koji pri datim vrednostima t_1 i r_f zavisi samo od r i t.

Lako se možemo uveriti da funkcija (12), u kojoj može f da znači čak makoju kontinuarnu funkciju navedenog argumenta, pretstavlja jedno parcijalno rešenje talasne jednačine (5). Pošto je ta jednačina linearna, to je i zbir svih takvih parcijalnih rešenja, koja pretstavljaju poremećaje pritiska izazvane talasima - impulsima - stvorenim u drugim intervalima vremena u toj tačci ili stvorenim u drugim tačkama T_2, T_3....-jedno rešenje te jednačine.

I poremećaji pritiska koji potiču od ravnih talasa pretstavljaju parcijalna rešenja jedn. (5).

Neki elementarni ravni talas neka se u trenutku vremena t nalazi između ravni

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = d + C_L(t - \frac{dt}{2})$$

i

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = d + C_L(t + \frac{dt}{2})$$

gde je

(13) $$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$(d + C_L(t \pm \frac{dt}{2})$ = otstojanje prve odn. druge ravni od početka koordinatnog sistema, α, β, γ = komponente vektora normale na ravan). Zbog ovog impulsa postoji u polju sledeći poremećaj pritiska

(14) $$\delta_2 p = \bar{\varrho} C_L u_2 I\left\{\frac{2}{C_L dt}(\alpha x + \beta y + \gamma z - d - C_L t)\right\}$$

kome se u toku vremena intenzitet ne menja. Lako se možemo uveriti da i takav poremećaj pretstavlja jedno parcijalno rešenje talasne jednačine (5). Kao opšte rešenje možemo tražiti u zbiru svih takvih parcijalnih rešenja koja potiču od prostiranja sfernih i ravnih talasa u atmosferi, dakle

(15) $$p = \sum_{i=1}^{n} \delta_i p$$

(n = broj impulsa koji se u datom trenutku vremena t nalaze u tački na koju se odnosi rešenje).

Svaki elementarni impuls $\delta_i p$ ima za posledicu da se u oblasti tačke A, na koju se odnosi rešen-je, u intervalu vremena dt vazduh pomeri za $d_i r = u_i dt$ u radijalnom pravcu od izvorne tačke T_i na spoljašnju (kod zgušnjenja) ili unutrašnju (kod razređenja) stranu. Sabiranjem svih takvih pomaka izvršenih u tački A dobijamo brzinu vazduha u toj tački kao posledicu prostiranja elementarnih impulsa na onom mestu u raznim pravcima:

(16) $$\vec{u} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{k} \vec{u}_i \, dt$$

(k = broj elementarnih impulsa koji u intervalu vremena Δt prolaze kroz tačku A, $\vec{u}_i$ = vektor parcijalne brzine u_i).

Kasnije ćemo da vidimo da se zajedno sa impulsima vrši prenos unutrašnje i kinetičke energije u atmosferi sa jednog mesta na drugo.

7. Hidrodinamička stabilnost pravolinijskih struja

Proučavali smo uslove stabilnosti atmosfere u stanju mirovanja (V-10) i na unutrašnjim graničnim površinama pod jednostavnim uslovima (4,5). Ovde nas interesuju kriterijumi stabilnosti vazduha u polju geostrofskih vetrova. Ovim problemima prvi se bavio E. Kleinschmidt (1941) i pokazao od čega zavisi stabilnost vazduha u polju gde duvaju horizontalni geostrofski vetrovi. Ići ćemo istim putem kojim je išao E. Kleinschmidt, a uzećemo u obzir i neka izvođenja J. Van Mieghem-a, belgijskog meteorologa-teoretičara.

U oblasti gde duvaju geostrofski vetrovi, gde se zbog toga sva kretanja vrše adijabatski i gde su izobarske i izosterske površine cilindrične površine sa horizontalnom generatrisom, važi

jednačina kretanja

(1) $$2\vec{\omega} x \vec{U}_g + \alpha \nabla p + \nabla \phi = 0$$

($\vec{U}_g$ = vektor brzine geostrofskog vetra). Pod pretpostavkom da vazduh struji u pravcu zapad-istok možemo u ortogonalnom koordinatnom sistemu sa x osom prema istoku mesto vektorske jedn. (1) pisati sledeće dve jednačine

(1') $$2\omega_z U_g + \alpha \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$
$$- 2\omega_y U_g + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

Te jednačine važe zajedno sa uslovom da je

(2) $$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dQ}{dt} = 0 \quad \text{i} \quad \vec{U}_g \cdot \nabla \phi = 0$$

Zamislimo sada da neki, inače makoji, delić vazduha sa te oblasti dobija neki impuls u pravcu normalnom na strujnice ("transverzalni impuls") od spolja. Zbog toga ima taj delić u odnosu na okolni vazduh koji smatramo da struji neporemećenom brzinom U_g relativnu brzinu

$$\vec{u} = (u, v, w)$$

U izabranom koordinatnom sistemu je prema tome brzina tog delića

(3) $$\vec{U} = (U_g + u, v, w) \qquad U_g = U_g(y, z)$$

Kao pri proučavanju statičke nestabilnosti pretpostavićemo i ovde da ima na početku posmatrani delić vazduha jednaku temperaturu kao okolni vazduh, da se kreće adijabatski i da se zbog toga za vreme kretanja njegova potencijalna temperatura $\theta = \theta_o(y,z)$ ne menja. Vrednosti koje se odnose na osu x označavaćemo indeksom o.

Za posmatrani delić vazduha, koji neka se kreće u otsustvu sila trenja i sila otpora sredine (zbog relativnog kretanja), važi očigledno sledeća jednačina kretanja

(4) $$\frac{d\vec{U}}{dt} + 2\vec{\omega} x \vec{U} + \alpha_d \nabla p + \nabla \phi = 0$$

(α_d = specifična zapremina delića). U svrhu daljeg tumačenja je korisno gradijentnu silu pisati na drugi način:

U saglasnosti sa definicijom potencijalne temperature možemo pisati

(5) $$p = 1000\left(\frac{T}{\theta}\right)^{\frac{c_p}{R}}$$

i zbog toga

$$\nabla p = 1000\frac{c_p}{R}\left(\frac{T}{\theta}\right)^{\frac{c_p}{R}-1} \nabla \left(\frac{p}{1000}\right)^{\frac{R}{c_p}}$$

Ako sada uzmemo u obzir jednačinu stanja i ponovo jedn. (5), dobijamo odavde

(6) $$\alpha \nabla p = \theta \nabla \pi$$

gde je

(7) $$\Pi = c_p\left(\frac{p}{1000}\right)^{\frac{R}{c_p}}$$

tzv. Exner-ova funkcija. Slično je

$$\alpha_d \nabla p = \theta_o \nabla \Pi$$

Ako sada dobivene vrednosti unesemo u jedn. (1) i (4), onda oduzimanjem prve jednačine od druge, kad uzmemo još u obzir vrednost (3), dobijamo

(8) $$\frac{d\vec{U}}{dt} + 2\vec{\omega}x\vec{u} + (\theta_o - \theta)\nabla\Pi = 0$$

Prema tome jednačine kretanja posmatranog delića u našem sistemu (sa x osom prema istoku) glase

(9) $$\begin{aligned} &\frac{d(U_g + u)}{dt} + 2\omega_y w - 2\omega_z v = 0 \\ &\frac{dv}{dt} + 2\omega_z u + (\theta_o - \theta)\frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0 \\ &\frac{dw}{dt} - 2\omega_y u + (\theta_o - \theta)\frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Neka se je posmatrani delić u trenutku vremena t = 0, kada mu je bio dodeljen transverzalni impuls, nalazio u samom početku koordinatnog sistema. Zbog dodeljenog impulsa bila je tada njegova brzina

(10) $$\vec{U}_o = (U_{go}, v_o, w_o)$$

(U_{go} = brzina geostrofskog vetra neporemećenog osnovnog stanja na osi x). Posmatrani delić vazduha počinje odmah da se udaljuje od ose x i pri tome dolazi u oblast gde može biti brzina geostrofskog vetra druga. Ako se ograničimo na posmatranja u srazmerno malom intervalu vremena (0,t) kada se delić nalazi još u blizini ose x, onda možemo sa dovoljnom tačnošću pisati

$$U_g - U_{go} = U_{gyo}y + U_{gzo}z \quad \text{i} \quad \theta - \theta_o = \theta_{yo}y + \theta_{zo}z$$

Ovde smo indeksima y i z označili parcijalne izvode u pravcima y odn z. Indeksom nula označene vrednosti odnose se na stanje na osi x. Integralenjem jedn. (9^1), kad uzmemo u obzir dobivenu vrednost za $U_g - U_{go}$, dobijamo

(11) $$u = (2\omega_z - U_{gyo})y - (2\omega_y + U_{gzo})z$$

Kad ovo i vrednost za ($\theta - \theta_o$) uzmemo u obzir u jedn. (9^2) i (9^3), dobijamo za komponente transverzalnog ubrzanja

(12) $$\frac{dv}{dt} = -a_{yy}y - a_{yz}z \quad \text{i} \quad \frac{dw}{dt} = -a_{zy}y - a_{zz}z$$

gde je

(13) $$\begin{cases} a_{yy} = 2\omega_z(2\omega_z - U_{gyo}) - \Pi_{yo}\theta_{yo} \\ a_{yz} = -2\omega_z(2\omega_y + U_{gzo}) - \Pi_{yo}\theta_{zo} \end{cases}$$

(13) $$\begin{cases} a_{zy} = -2\omega_y(2\omega_z - U_{gyo}) - \pi_{zo}\theta_{yo} \\ a_{zz} = 2\omega_y(2\omega_y + U_{gzo}) - \pi_{zo}\theta_{zo} \end{cases}$$

Lako možemo da vidimo da je

(14) $$a_{yz} = a_{zy}$$

Primenom operatora ∇x na jedn. (1) i kad uzmemo u obzir jedn. (6) i da je $\nabla \cdot \bar{U}_g = 0$, dobijamo

(15) $$2\vec{\omega} \cdot \nabla U_g = [\nabla\theta x \nabla\pi]_x = [\nabla\alpha x \nabla p]_x = N$$

Pri tome smo uzeli u obzir da važe sledeći identiteti

(16) $$\begin{gathered} \nabla x(\vec{a} x \vec{b}) = \vec{a}\nabla\cdot\vec{b} - \vec{b}\nabla\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\nabla\vec{b} + \vec{b}\cdot\nabla\vec{a} \\ \nabla x(\alpha\vec{a}) = \alpha\nabla x\vec{a} + \nabla\alpha x\vec{a} \\ \nabla x \nabla\alpha = 0 \end{gathered}$$

Jedn. (15) koju možemo pisati i u obliku

(15') $$2\omega_y U_{gy} + 2\omega_z U_{gz} = \theta_y \pi_z - \pi_y \theta_z = \alpha_y p_z - p_y \alpha_z = N$$

dobijamo jednostavno i pomoću jedn. (1').

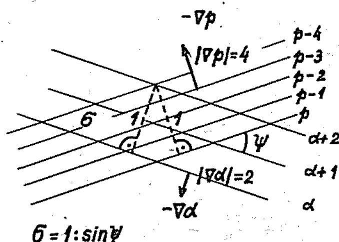
Uzgred budi spomenuto da N znači broj izobar-izosterskih solenoida koji prolaze kroz jedinicu površine, a koja leži normalno na strujne linije (na pravac x). To nam dokazuje slika 70 iz koje vidimo da kroz površinu 1:sinψ (ψ= ugao nagiba izosterskih površina prema izobarskim) prolazi $|\nabla\alpha||\nabla p|$ izobar-izosterskih solenoida. Prema tome prolazi kroz jedinicu površine koja stoji normalno na strujnice $|\nabla\alpha||\nabla p|\sin\psi = [\nabla\alpha x \nabla p]_x$ izobar-izosterskih solenoida.

Upoređenjem dobivenih jednačina (15') sa izrazima za a_{yz} i a_{zy} vidimo da stvarno važi jednačina (14), što je bilo potrebno dokazati.

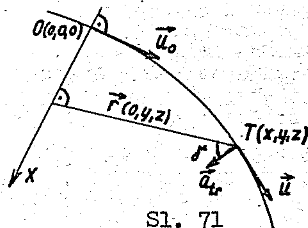
Vektor transverzalnog ubrzanja

(17) $$\vec{a}_{tr} = (0, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt})$$

je jedna mèra za hidrodinamičku stabilnost posmatranog delića. Ako je usmeren tako da je ugao γ koji gradi ovaj vektor sa vektorom $-\vec{r} = -(0,y,z)$ manji ili veći od 90°, onda je očigledno posmatrani delić vazduha, a njime i atmosfera u onoj oblasti, u stabilnom odn. labilnom stanju ravnoteže (sl. 71). Drugim rečima možemo da kažemo da je posmatrani delić vazduha u stabilnom



Sl. 70. Određivanje broja izobarno izosternih solenoida



Sl. 71

odn. labilnom stanju ravnoteže tada kada je

(18) $$-\vec{a}_{tr}\cdot\vec{r} > \text{odn.} < 0$$

tj. kada je ((12), (14))

(19) $$Q(y,z) = a_{yy}y^2 + 2a_{yz}yz + a_{zz}z^2 > \text{odn.} < 0$$

Dobivena kvadratna forma javlja se i u jednačini energije poremećenog delića

(20) $$\frac{1}{2}(v^2 + w^2) - \frac{1}{2}(v_o^2 + w_o^2) = -\frac{Q}{2}$$

koju dobijamo iz jedn. (12), ako prvu množimo sa v dt, drugu sa w dt, a posle sabiranja i integralenja, i pri tome uzmemo u obzir početne uslove i jedn. (14). Ovde možemo

(21) $$E = \frac{Q}{2}$$

tumačiti kao "transverzalnu potencijalnu energiju" u odnosu na početno stanje (t = 0).

U slučaju stabilnosti (nestabilnosti) udaljavanjem delića od tačke O(0,0,0) kinetička energija se smanjuje (povećava), a transverzalna potencijalna energija E se u istom iznosu povećava (smanjuje). U slučaju nestabilnosti je $E < 0$. Kad uzmemo ovo u obzir u vezi sa definicijom (21) i jedn. (20), vidimo da nam

(22) $$L = -E$$

pretstavlja specifičnu <u>energiju hidrodinamičke nestabilnosti</u> posmatranog delića (za masu m = 1) u tačci O(0,0,0) u odnosu na obližnju tačku T(x,y,z) gde dobija transverzalnu brzinu (0,v,w).

Na drugoj strani dobijamo množenjem jedn. (4) skalarno sa vektorom brzine $\vec{U}$ posle integralenja

(23) $$\frac{1}{2}\left[(U_g + u)^2 + v^2 + w^2\right] + \theta_o\pi + \phi = \frac{1}{2}\left[U_{go}^2 + v_o^2 + w_o^2\right] + \theta_o\pi_o + \phi_o$$

Oduzimanjem jedn. (20) od ove dobijamo

(24) $$S(y,z) - S(0,0) = \frac{Q}{2}$$

gde je

(25) $$S(y,z) = \theta_o\pi + \phi + \frac{1}{2}(U_g + u)^2 \qquad \theta_o\pi = c_pT$$

zbir iz ukupne specifične potencijalne energije delića (<u>Montgomery</u>-ev potencijal, str. 94) i onog dela kinetičke energije koji potiče od komponente brzine delića jedinice mase u pravcu x. Odavde vidimo da delić vazduha dobija u slučaju nestabilnosti kinetičku energiju na račun energije koja može da potiče u energiji polja pritiska, u gravitacionoj potencijalnoj energiji i u kinetičkoj energiji osnovnog strujanja.

Hidrodinamičku nestabilnost možemo tumačiti još na jedan način: Iz definicije za Q(y,z) proizlazi da se je posmatrani delić

na samom početku, kad je bilo y = z = 0, kretao u atmosferi gde je bilo

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = a_{yy}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} = a_{yz} = a_{zy}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = a_{zz}$$

Ako sada zamislimo da smo funkciju S(y,z) razvili u Taylor-ov red, onda odavde zaključujemo da je u oblasti geostrofskih vetrova zbir iz ukupne potencijalne energije i "longitudinalne" kinetičke energije ekstrem, i da je taj ekstrem u slučaju stabilnosti minimum, a u slučaju nestabilnosti maksimum.

Znak kvadratne forme Q određuju sve tri vrednosti a_{yy}, a_{yz} i a_{zz}. Na koji način zavisi znak od ovih vrednosti najbolje vidimo ako kvadratnu formu pišemo na sledeći način:

(26) $$Q = \frac{1}{a_{yy}}\left[(a_{yy}y + a_{yz}z)^2 - az^2\right].$$

gde je

(27) $$a = a_{yz}^2 - a_{yy}a_{zz}$$

Znak ove funkcije a time i stabilnost vazduha zavisi od raznih faktora:

1. $a < 0$ (kvadratna forma je definitna).

Tada su i a_{yy} i $a_{zz} > 0$ ili < 0 i u prvom slučaju, bez obzira u kom pravcu bio bi dodeljen transverzalni impuls, postoji stabilnost a u drugom slučaju($a_{yy} < 0$), opet bez obzira u kom pravcu bio bi dodeljen transverzalni impuls, postoji nestabilnost.

2. $a > 0$.

Za neke pravce je u ovom slučaju atmosfera stabilna, a za neke nestabilna. Za dva pravca p_1 i p_2 kvadratna forma Q iščezava. U ovim pravcima atmosfera je u indiferentnom stanju ravnoteže. Nagib ovih pravaca prema y-osi daje nam sledeća jednačina

(28) $$a_{zz}\left(\frac{z}{y}\right)^2 + 2a_{yz}\left(\frac{z}{y}\right) + a_{yy} = 0$$

Odavde dobijamo za jedan i drugi nagib

(29) $$tg\varphi_1 = \frac{-a_{yz} - \sqrt{a}}{a_{zz}} \quad \text{i} \quad tg\varphi_2 = \frac{-a_{yz} + \sqrt{a}}{a_{zz}}$$

U slučaju da je $a_{zz} > 0$ je atmosfera stabilna ($Q > 0$) za sve one pravce za koje količnik pravca $z:y = tg\varphi$ leži u granicama

$$tg\varphi < tg\varphi_1 \quad \text{ili} \quad tg\varphi_2 < tg\varphi$$

U pravcima u kojima je pak

$$tg\varphi_1 < tg\varphi < tg\varphi_2$$

je atmosfera nestabilna.

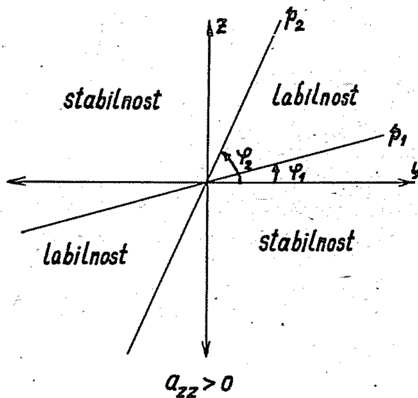
Slično je u slučaju $a_{zz} < 0$ atmosfera stabilna u sektorima u kojima je

$$tg\varphi_2 < tg\varphi < tg\varphi_1$$

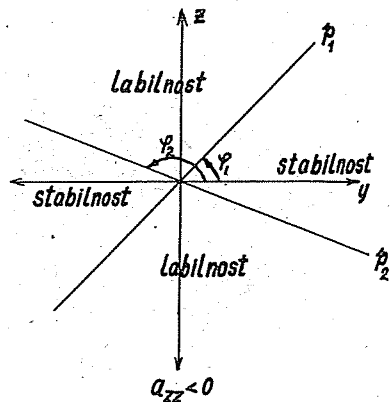
a nestabilna tamo gde je

$$tg\varphi < tg\varphi_2 \qquad ili \qquad tg\varphi_1 < tg\varphi$$

Svi ovi slučajevi prikazani su na slici 72.



$a > 0$



Sl. 72. Sektori stabilnosti i nestabilnosti

3. a = 0.

Kao što vidimo iz jedn. (29) i (26) je atmosfera u ovom slučaju svuda sem u pravcu za koji je

$$tg\varphi = tg\varphi_1 = tg\varphi_2 = -\frac{a_{yz}}{a_{zz}} \tag{30}$$

stabilna odn. nestabilna. U ovom pravcu je indiferentna. Već prema tome da li je $a_{yy} >$ ili < 0 atmosfera je stabilna odn. nestabilna.

Hidrodinamička nestabilnost atmosfere u oblasti geostrofskih vetrova određena je veličinama a_{yy}, a_{yz}, a_{zz}. U svrhu daljeg tumačenja i kvantitativnog izračunavanja treba ove veličine izraziti sa poznatim veličinama stanja vazduha strujnog polja.

Ako y-osu orijentišemo u horizontalnom pravcu prema severu i uzmemo u obzir jedn. (6) i (1'), dobijamo za vrednosti (13) kojima je određena stabilnost atmosfere u kojoj u zonalnom pravcu duvaju horizontalni geostrofski vetrovi

$$\begin{aligned} a_{yy} &= f\left[f - \theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U_g}{\theta}\right)\right] \\ a_{yz} &= f\left[-f' - \theta\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{U_g}{\theta}\right)\right] \end{aligned} \tag{31}$$

(31) $$a_{zy} = f'\left[-f + \theta \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U_g}{\theta}\right)\right] + \frac{g}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}.$$
$$a_{zz} = f'\left[f' + \theta \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{U_g}{\theta}\right)\right] + \frac{g}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}$$

U specijalnom slučaju, kada je atmosfera u stanju mirovanja ($U_g = 0$), je

(32) $$a_{yy} = f^2 \;, \quad a_{yz} = a_{zy} = -ff' \;, \quad a_{zz} = f'^2 + \frac{g}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}$$

i u saglasnosti sa jedn. (27)

(33) $$a = -f^2 \frac{g}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}$$

Ako je $\frac{\partial\theta}{\partial z} > 0$ (statička stabilnost), je $a < 0$ (kvadratna forma Q je definitna, slučaj 1., str. 217) i makoji delić vazduha je za makoji pravac u meridionalnoj ravni u stabilnom stanju. Kada je pak $\frac{\partial\theta}{\partial z} < 0$ i time $a > 0$, atmosfera je uglavnom labilna. Sektori stabilnosti određeni su pravcima (29). Sem za sasvim male vertikalne gradijente potencijalne temperature, a_{zz} mnogo je veće od $-a_{yz}$ i a. Sektor stabilnosti je prema tome ograničen dvema ravnima koje leže pod vrlo malim nagibom prema horizontalnoj ravni. Sa smanjivanjem vertikalnog gradijenta potencijalne temperature te dve ravni približavaju se jedna drugoj i u graničnom slučaju $a = \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0$ sliju se u jednu. Nagib takve površine prema horizontalnoj ravni je f:f'. Ona je prema tome paralelna osi rotacije Zemlje.

Vidimo da je atmosfera koja je u stanju mirovanja bar za neke pravce uvek u stabilnom stanju ravnoteže. Zbog dobijanja transverzalnog impulsa (u meridionalnoj ravni) u sektoru stabilnosti delić osciliše duž ose x, tj. duž širinskog kruga na kome je na početku bio. Ovakve oscilacije opisali smo ranije (VII-2).

Ako se, u drugom slučaju, pri horizontalnim geostrofskim vetrovima potencijalna temperatura u horizontalnom pravcu ne menja (izentropske površine leže horizontalno), je atmosfera u horizontalnom pravcu u stabilnom, indiferentnom odn. labilnom stanju kada je, (26), (31),

(34) $$f\left[f - \frac{\partial U_g}{\partial y}\right] \gtreqless 0$$

Na severnoj hemisferi je to tada kada je

(35) $$\frac{\partial U_g}{\partial y} \lesseqgtr f$$

Pri $\varphi = 45^o$ je napr. $f = 10^{-4}sec^{-1}$, što znači da je tamo pod navedenim uslovima prilikom horizontalnih premeštanja atmosfera u stabilnom odn. labilnom stanju kada se u horizontalnom pravcu prema severu brzina geostrofskih vetrova sporije odn. brže menja nego za 10 $msec^{-1}$/100 km.

Ovde smo proučavali problem dinamičke nestabilnosti pod jednostavnim uslovima. Problem je ustvari mnogo složenije prirode pod opštim uslovima, napr. u oblasti gradijentnih i drugih vetrova.

XII. NEKE OSOBINE STRUJNOG POLJA I POLJA PRITISKA ATMOSFERE

1. Opšte o dvodimenzionalnom strujnom polju

U atmosferi se vazduh kreće iznad velikih prostranstava uglavnom horizontalno. Zbog toga je od naročitog značaja da se malo bliže upoznamo sa kinematikom dvodimenzionalnog strujnog polja.

U odeljku II-2 videli smo da možemo svako strujno polje u srazmerno maloj oblasti makojetačke tumačiti kao superpoziciju polja translacije, simetričnog potencijalnog polja deformacije i antisimetričnog polja rotacije. Tako možemo u saglasnosti sa jedn. II-2: (1) do (4) dvodimenzionalni vektor brzine $\vec{u} = (u,v,0)$ horizontalnog strujnog polja u blizini makoje tačke O, u kojoj zamišljamo početak ortogonalnog koordinatnog sistema, pisati u obliku

$$(1)\qquad \begin{aligned} u &= u_o + \frac{\partial u}{\partial x}x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)y - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)y \\ v &= v_o + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)x + \frac{\partial v}{\partial y}y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)x \end{aligned}$$

(vrednosti parcijalnih izvoda odnose se na tačku O).

Intenzitet parcijalnih polja deformacije i rotacije zavisi od divergencije i rotacije vektora brzine $\vec{u}$. U našem slučaju je

$$(2)\qquad \operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{i} \quad \operatorname{rot}\vec{u} = \left(0,\ 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

U tom slučaju postoji samo vertikalna komponenta rotacije vektora brzine $\vec{u}$. Ona se zove vrtloženje (vorticity) horizontalne struje.

Vrednosti (2) su dve invarijante za usku oblast tačke O, dve veličine koje su nezavisne od orijentacije koordinatnog sistema. Zbog toga je korisno da pomoću njih izrazimo i jednu i drugu komponentu vektora brzine.

Očigledno možemo pisati

$$(3)\qquad \begin{aligned} u &= u_o + ax + bx - cy + dy \\ v &= v_o - ay + by + cx + dx \end{aligned}$$

gde je

$$(4)\qquad a = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right),\quad b = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right),\quad c = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad d = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Jednačine (3) sadrže spomenute invarijante, dok veličine a i d zavise od orijentacije koordinatnog sistema. Zgodnom orijentacijom možemo postići da d iščezava:

Kao što vidimo iz slike 73 je u ortogonalnom koordinatnom sistemu x', y' koji ima sa koordinatnim sistemom x, y isti početak i čija pozitivna x'-osa zaklapa sa pozitivnom x-osom ugao ϑ

$$x' = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta \qquad \text{i} \qquad y' = -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta$$

Odavde dobijamo

$$x = x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta, \qquad y = x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta$$

i

$$u = u'\cos\vartheta - v'\sin\vartheta, \qquad v = u'\sin\vartheta + v'\cos\vartheta$$

(u', v'= komponente brzine u pravcima x' i y'). Prema tome je

$$2d = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial v}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\sin\vartheta + \frac{\partial v'}{\partial x'}\cos\vartheta\right)\cos\vartheta - \left(\frac{\partial u'}{\partial y'}\sin\vartheta + \frac{\partial v'}{\partial y'}\cos\vartheta\right)\sin\vartheta +$$
$$\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\cos\vartheta - \frac{\partial v'}{\partial x'}\sin\vartheta\right)\sin\vartheta + \left(\frac{\partial u'}{\partial y'}\cos\vartheta - \frac{\partial v'}{\partial y'}\sin\vartheta\right)\cos\vartheta$$

i odavde

(5) $d = a'\sin 2\vartheta + d'\cos 2\vartheta$

gde su a' i d' odgovarajuće vrednosti a i d u koordinatnom sistemu x', y'. Sličnim postupkom dobijamo

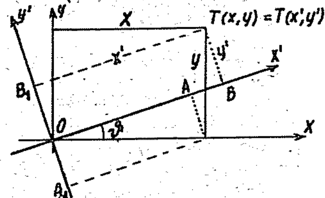
(5') $a = a'\cos 2\vartheta - d'\sin 2\vartheta$

$(x',x) = \vartheta$

$(x',y) = \frac{\pi}{2} - \vartheta$

$(y',x) = \frac{\pi}{2} + \vartheta$

$(y',y) = \vartheta$



Sl. 73. Transformacija koordinatnog sistema

Iz jedn. (5) i (5') proizlazi da je

$$(6) \qquad \begin{aligned} a' &= d\sin 2\vartheta + a\cos 2\vartheta \\ d' &= d\cos 2\vartheta - a\sin 2\vartheta \end{aligned}$$

Pošto su a i d dve određene vrednosti, možemo ϑ odrediti ovako da je

$$d' = 0 \quad \text{i time} \quad \operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{d}{a}$$

Pošto je dalje tg 2ϑ periodična funkcija sa periodom $\frac{\pi}{2}$, to postoje dva takva pravca za koja je d' = 0. Ta dva pravca stoje normalno jedan na drugom i leže u pravcu <u>glavnih osa strujnog polja</u>. Lako se možemo uveriti da u pravcu jedne glavne ose ima a' najveću, a u pravcu druge glavne ose najmanju moguću vrednost.

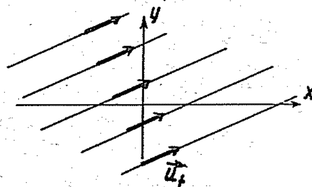
U koordinatnom sistemu sa osama u pravcu glavnih osa jedn. (3) glase

$$(7) \qquad \begin{aligned} u &= u_o + ax + bx - cy \\ v &= v_o - ay + by + cx \end{aligned}$$

Odavde vidimo da možemo dvodimenzionalno strujne polje u srazmerno maloj oblasti makoje tačke O tumačiti kao zbir četiri parcijalna <u>elementarna polja</u>:

1. <u>Polje translacije</u> ($\vec{u}_t = (u_o, v_o)$).
Strujnice su paralelne prave linije i parcijalna brzina u_t je svuda u polju jednaka. (sl. 74).

2. <u>Polje deformacije bez divergencije</u> = <u>hiperbolično polje</u> ($\vec{u}_{d1}$ = (ax, - ay)).



Sl. 74. Polje translacije

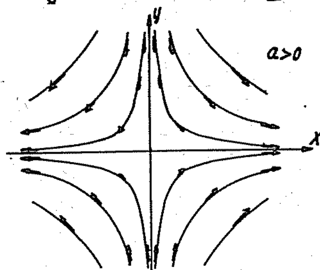
Iz diferencijalnog oblika jednačine strujnice

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dy}{-ay}$$

dobijamo integralenjem jednačinu strujnice koja glasi

$$xy = const$$

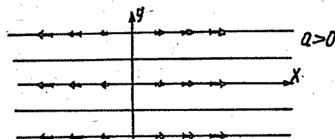
Strujnice su dakle pravilne hiperbole čije asimptote su glavne ose (sl. 75). U slučaju da je $a > 0$ (sl. 75), strujanje se vrši prema x-osi, a kada je $a < 0$ strujanje se vrši od ove ose upolje.



Sl. 75. Hiperbolično polje

Komponente $u_{d1} = ax$ i $v_{d1} = -ay$ vektora brzine $\vec{u}_{d1}$ u pravcu osa x i y prikazane su na sl. 76 i 77. U slučaju da je $a > 0$, osa x zove se osa dilatacije ili osa rastezanja, a osa y osa kontrakcije ili osa stezanja.

Pošto je div $\vec{u}_{d1} = 0$, to se u ovakvom strujnom polju zapremina delića vazduha po intenzitetu ne menja, menja se samo po obliku. Možemo još napomenuti da se u ovom kao i u sledećim parcijalnim elementarnim poljima intenzitet vektora brzine sa otstojanjem od centra linearno povećava.



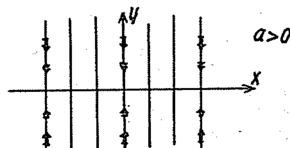
Sl. 76. Komponenta u_{d1} u hiperboličnom polju

3. Polje deformacije samo zbog divergencije = polje divergencije ($\vec{u}_{d2} = (bx, by)$).

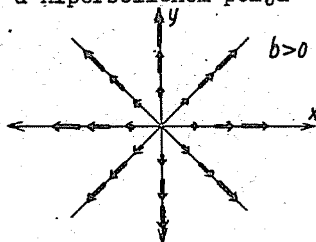
Sličnim postupkom kao pre dobijamo odmah da su strujnice prave linije

$$\frac{x}{y} = const$$

koje idu kroz centar. U slučaju da je $b \gtrless 0$, vazduh struji od centra (sl. 78) odn. ka centru. Govorimo o horizontalnoj divergenciji i konvergenciji. Tačka O zove se tačka divergencije ili konvergencije. Kada imamo priliku da posmatramo slično strujno polje u prirodi tada uvek postoji i vertikalna komponenta vektora brzine, tj spuštanje (supsidencija) odn. dizanje vazduha.



Sl. 77. Komponenta v_{d1} u hiperboličnom polju



Sl. 78. Polje divergencije

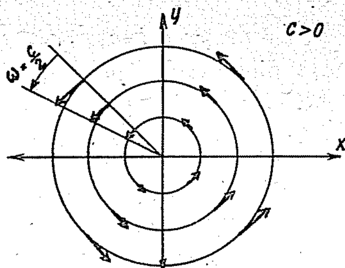
U polju divergencije menja se delićima vazduha zapremina, ali ne po obliku.

4. Polje cirkulacije ($\vec{u}_c = (-cy, cx)$)

Strujnice su koncentrični krugovi

$$x^2 + y^2 = \text{const}$$

oko centra O. Pošto nam c pretstavlja vertikalnu komponentu rotora vektora brzine $\vec{u}_c$, to se u slučaju da je c pozitivno rotacija vrši u pozitivnom smislu (sl. 79). Kada je c negativno, vazduh rotira u negativnom smislu.



Sl. 79. Polje cirkulacije

Videli smo da veličine a i d zavise od orijentacije koordinatnog sistema. Na isti način možemo da vidimo da su veličine b i c invarijantne prema transformaciji koordinatnog sistema, da je dakle uvek

(8) $$b = b' \quad \text{i} \quad c = c'$$

Nezavisne od orijentacije koordinatnog sistema su i sledeće dve skalarne veličine

(9) $$\varphi = \varphi_o + u_o x + v_o y + \frac{b+a}{2} x^2 + dxy + \frac{b-a}{2} y^2$$

gde je u saglasnosti sa jedn. (4)

$$b + a = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{i} \quad b - a = \frac{\partial v}{\partial y}$$

i

(10) $$\psi = \psi_o + \frac{c}{2}(x^2 + y^2)$$

(φ_o i ψ_o = konstante). Kad uzmemo u obzir jedn. (8^2) i da je kvadrat otstojanja $x^2 + y^2$ invarijantan prema ortogonalnoj transformaciji vidimo da je druga veličina stvarno invarjantna. Invarijantnost prve veličine dokazujemo na sličan način koji nas je doveo do jedn. (5).

Skalarna veličina φ zove se potencijalna funkcija, a skalarna veličina ψ zove se strujna funkcija dvodimenzionalnog strujnog polja. Ove funkcije u opštem slučaju zavise i od koordinata x,y i od vremena t.

Polje u kome je svuda $\psi = 0$, koje dakle ne sadrži rotacije, zove se, kao što smo već spomenuli (str. 22), potencijalno polje. U takvom polju stoje strujnice normalno na ekvipotencijalne površine φ = const, a ascendent $\nabla\varphi$ potencijalne funkcije φ jednak je vektoru brzine $\vec{u}$.

U koliko je svuda u polju $\varphi = 0$ je u saglasnosti sa jedn. (10) i (3)

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{i} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (\varphi = 0)$$

U takvom polju je prema tome $\nabla \psi \cdot \vec{u} = 0$ što znači da ekviskalarne površine ψ = const leže paralelno sa strujnicama.

U opštem slučaju možemo dvodimenzionalno strujno polje sebi

pretstaviti funkcijama φ i ψ i u saglasnosti sa jedn. (9), (10) i (3) je

$$(11)\qquad u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad i \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Iz jedn. (2), (11), (9) i (10) vidimo da je

$$(12)\qquad \operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 2b \qquad i \qquad \operatorname{rot}_z\vec{u} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 2c$$

Polje u kome je svuda $b = 0$ je bezdivergentno, a polje u kome je $c = 0$ je bezvrtložno polje.

Izraze za divergenciju i za vrtloženje možemo u tzv. <u>prirodnom koordinatnom sistemu</u> izraziti na pregledniji način:

Ako pišemo

$$u = U\cos\beta \qquad i \qquad v = U\sin\beta$$

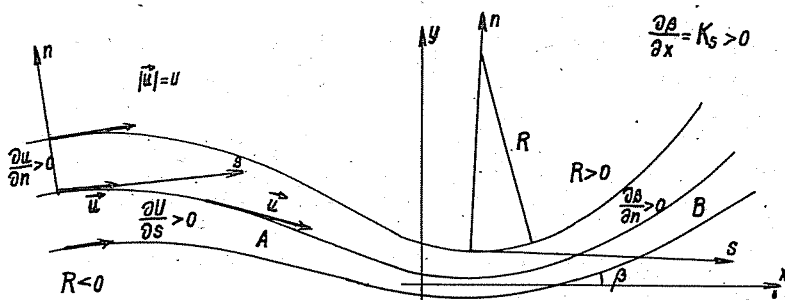
gde je U intenzitet vektora brzine, a β ugao koji taj vektor gradi sa x-osom, onda je očigledno

$$(13)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x}\cos\beta - U\sin\beta\frac{\partial\beta}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x}\sin\beta + U\cos\beta\frac{\partial\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta - U\sin\beta\frac{\partial\beta}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y}\sin\beta + U\cos\beta\frac{\partial\beta}{\partial y} \end{aligned}$$

Ako zamislimo sada da se početak koordinatnog sistema nalazi u napadnoj tačci vektora $\vec{u}$ i da je $x = s$ osa usmerena u pravcu strujanja (prirodni koordinatni sistem), onda je $\beta = 0$ i $\frac{\partial\beta}{\partial x} = K_s = \frac{1}{R}$ (K_s, R = krivina odn. poluprečnik krivine strujnice, sl. 80). U ovom slučaju je

$$(14)\qquad \operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial U}{\partial s} + U\frac{\partial\beta}{\partial n} \qquad i \qquad \operatorname{rot}_z\vec{u} = \frac{U}{R} - \frac{\partial U}{\partial n}$$

(koordinata y prirodnog sistema označena je sa n = normala). Slika



Sl.80. Tumačenje izraza u jedn. (14)

80 tumači pojedine izraze u dobivenim jednačinama.

Na raznim mestima strujnog polja postoje oblasti u kojima se strujnice idući sa vetrom približavaju jedna drugoj (oko tačke A na sl. 80) ili udaljuju jedna od druge (tačka B). U prvom slučaju govorimo o konfluenciji, u drugom o difluenciji. U svom udžbeniku S. Petterssen dao je jedan izraz pomoću koga se može kvantitativno izraziti ove veličine. Kad uzmemo u obzir jedn. (14), vidimo da konfluencija i difluencija ne znači i divergenciju vektora brzine, da ne znači još, drugim rečima, nagomilavanje vazduha na onom mestu ili odlaženje vazduha sa onog mesta.

2. Dvodimenzionalno linearno strujno polje

Vrednosti a,b,c iz prethodnog odeljka u opštem slučaju su funkcije koordinata x,y i vremena t. Ako u specijalnom slučaju te vrednosti ništa ne zavise od koordinata x i y govorimo o linearnom strujnom polju. Ovde ćemo tom specijalnom dvodimenzionalnom strujnom polju posvetiti našu pažnju.

Za proučavanje dvodimenzionalnog strujnog polja je korisno da prvo potražimo tačku T_c gde vektor brzine iščezava. U saglasnosti sa jedn. 1 (7) koordinate te tačke su vezane za jednačine

$$(1)\qquad \begin{aligned} (b^2 - a^2 + c^2)x_c &= -(b - a)u_o - cv_o \\ (b^2 - a^2 + c^2)y_c &= cu_o - (a + b)v_o \end{aligned}$$

Očigledno tačka $T_c(x_c, y_c)$ u konačnosti postoji kada je

$$(I)\qquad b^2 - a^2 + c^2 \neq 0$$

Taj slučaj ćemo prvo da proučimo. Posle toga proučićemo slučaj koji je vezan za uslov

$$(II)\qquad b^2 - a^2 + c^2 = 0$$

Ako paralelnim prenosom koordinatnog sistema, centar sistema prenesemo u tačku T_c, jednačine 1 (7) redukuju se na sledeće

$$(2)\qquad \begin{aligned} u &= (b + a)x - cy \\ v &= cx + (b - a)y \end{aligned}$$

Prvo se pitamo u kojim slučajevima postoje pravolinijske strujnice koje idu kroz centar takvog koordinatnog sistema. Za svaku takvu pravu p očigledno važi

$$(3)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{y}{x} = tg\,\psi = const$$

gde je ψ ugao koji prava p gradi sa x-osom. Ako u jedn. (3) unesemo za u i v vrednosti iz jedn. (2) dobijamo u opštem slučaju dve prave p, tj. prave p_1 i p_2 sa količnicima pravca

$$(4)\qquad K_1 = tg\psi_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - c^2}}{c} \quad i \quad K_2 = tg\psi_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c}$$

Vidimo da u slučaju kada je

$$(5)\qquad a^2 - c^2 \gtreqless 0 \qquad c \neq 0$$

postoje dve prave, jedna odn. nijedna prava strujna linija kroz koordinatni početak.

Ako pišemo kao ranije za prave strujne linije kroz centar

$$\lambda x = (b + a)x - cy$$
$$\lambda y = cx + (b - a)y$$

dobijamo odavde

(6) $$\lambda = b \pm \sqrt{a^2 - c^2}$$

što znači da su u koordinatnom sistemu ξ, η koji ima sa sistemom x,y zajednički početak i čije ose leže u pravcu pravih strujnih linija, komponente brzine

(7) $$u_\xi = (b + \sqrt{a^2 - c^2})\xi \quad \text{i} \quad v_\eta = (b - \sqrt{a^2 - c^2})\eta$$

Lako se možemo uveriti da osa ξ leži u pravcu p_1 (kome pripada ugao ψ_1) a osa η u pravcu p_2:

Vektor brzine delića koji se nalazi na osi ξ ima u pravcu x komponentu (sl. 81, (7))

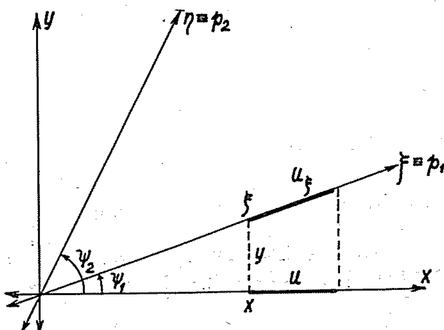
$$u = u_\xi \cdot \frac{x}{\xi} = (b + \sqrt{a^2 - c^2})x$$

Ako uzmemo u obzir jedn. (2^1) dobijamo odavde

$$\frac{y}{x} = \frac{a - \sqrt{a^2 - c^2}}{c}$$

Upoređenjem dobivene vrednosti sa jedn. (3) i (4) vidimo da ξ-osa stvarno leži u pravcu p_1 a η-osa u pravcu p_2.

U sistemu ξ, η diferencijalna jednačina strujnice glasi (I-5)



Sl. 81. Određivanje pravaca p_1 i p_2

(8) $$\frac{d\xi}{u_\xi} = \frac{d\eta}{v_\eta}$$

Odavde i iz jedn. (7) dobijamo jednačinu strujnice

(9) $$\frac{\eta}{\eta_0} = \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{\frac{B}{A}}$$

gde je

(10) $$A = b + \sqrt{a^2 - c^2} \quad \text{i} \quad B = b - \sqrt{a^2 - c^2}$$

Kroz centar postoje dve prave, a da je ispunjen uslov (I), u dva opšta slučaja

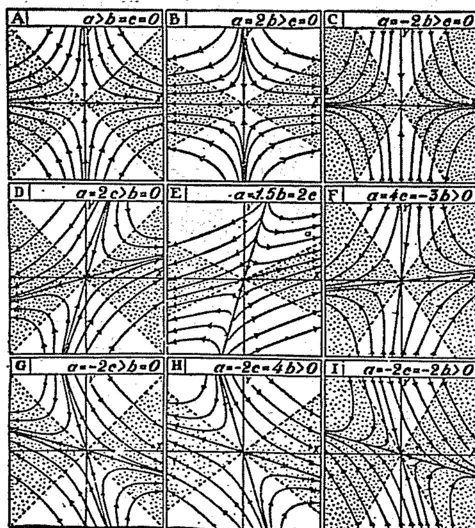
(I^1,a) $\quad b^2 > a^2 - c^2 > 0 \quad$ (deformacija jača

(I^1,b) $\quad a^2 - c^2 > b^2 \geq 0 \quad$ od rotacije)

Pošto su u prvom slučaju vrednosti A i B pozitivne, to su tada, kao što vidimo iz jedn. (9), strujnice paraboličnog tipa i sve idu kroz centar. Ovakvo strujno polje u atmosferi se ne pojavljuje i o njemu nećemo dalje da diskutujemo.

U drugom slučaju (I^1, b) je $A > 0$ i $B < 0$. Zbog toga su strujnice (9) hiperboličnog tipa sa temenima okrenutim prema centru. Razne mogućnosti prikazane su na sl. 82 (prema S. Petterssen-u). Iz slike možemo odmah proveriti vrednosti (4).

Slike A do C prikazuju tri polja deformacije bez rotacije. Superpozicijom polja deformacije bez divergencije (sl. A) i srazmerno slabog polja pozitivne rotacije (sl. 79) dobijamo sl. 82 D. Slično dobijamo oduzimanjem srazmerno slabog pozitivnog polja rotacije od hiperboličnog polja sliku 82 G. Superpoziciju hiperboličnog polja, polja divergencije i srazmerno slabog polja rotacije prikazuju slike 82 E, F, H i I.



Sl. 82. Prikaz linearnog strujnog polja sa strujnicama hiperboličnog oblika

Ukoliko nema rotacije pravolinijske strujnice stoje normalno jedna na drugoj i one pretstavljaju glavne ose strujnog polja. To su ujedno osa rastezanja (u našem slučaju x-osa) i osa stezanja. Dodavanjem pozitivne rotacije (ciklonalne rotacije) pravolinijske strujnice počinju da se približavaju pravoj $y = x$ i kada se rotacija toliko poveća da postaje $a = c$, one se susretnu. Tada postoji u polju samo jedna pravolinijska strujnica $y = x$. Sličan je slučaj prilikom dodavanja anticiklonalne rotacije. Tada se pravolinijske strujnice približavaju pravoj $y = -x$ gde se pri $a = -c$ susretnu. Ta dva slučaja pretstavljaju drugu mogućnost (5), dakle

$$(I^2) \qquad a^2 - c^2 = 0 \qquad b \neq 0$$

Specijalni slučaj ovog slučaja

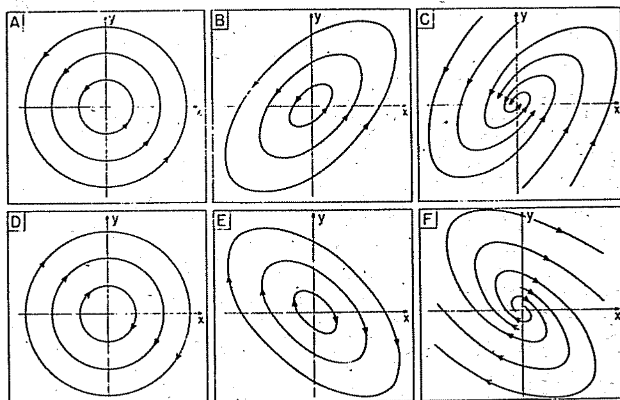
$$a = c = 0 \qquad b \neq 0$$

pretstavlja polje divergencije o kome je bilo reči u prethodnom odeljku.

Kada je pak

(I^3) $$a^2 - c^2 < 0$$

(rotacija jača od deformacije) nema pravolinijskih strujnica kroz centar. Nekoliko tipičnih primera prikazano je na sl. 83 (prema S. Petterssenu).



Sl. 83. Prikaz linearnog strujnog polja u kome preovlađuje rotacija

Primeri A i D pretstavljaju čistu rotaciju, B i E rotaciju i deformaciju bez divergencije, a primeri C i F superpoziciju polja B i E i polja konvergencije odn. divergencije.

Ostaje još da proučimo slučaj (II).

Kada je ispunjen uslov (II) je vrednost koja stoji na levoj strani prve kao i druge jedn. (1) jednaka nuli. Jedn. (1) mogu da budu zbog toga u tom slučaju ispunjene samo tada kada je

(II^1) $$\frac{v_o}{u_c} = - \frac{b - a}{c} = \frac{c}{a + b}$$

i u saglasnosti sa jedn. 1 (7)

(11) $$u = u_o + (a + b)x - cy$$ $$v = v_o + \frac{c}{a + b}\left[(a + b)x - cy\right]$$

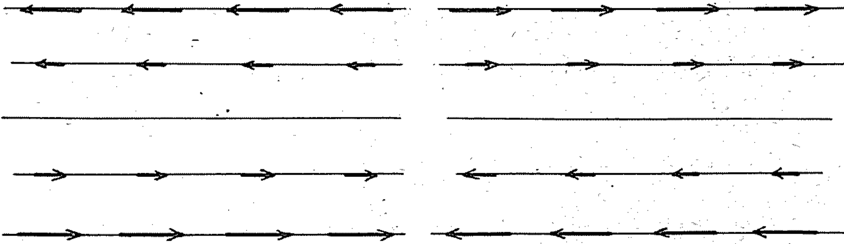
Odavde vidimo da u posmatranom slučaju (II^1) postoji bezbroj tačaka T_c u kojima vektor brzine iščezava i da sve te tačke leže na pravoj liniji

(12) $$u_o + (a + b)x - cy = 0$$

Ako zamislimo da se početak našeg koordinatnog sistema nalazi negde na liniji (12), onda je u jedn. (11) $u_o = v_o = 0$. Kad uzmemo ovo u obzir vidimo da ima vektor brzine svuda u polju isti pravac koji sa osom x zaklapa ugao ψ koji dobijamo iz uslova

(13) $$tg\psi = \frac{v}{u} = \frac{c}{a + b}$$

U bezdivergentnom polju (b = 0) je u saglasnosti sa uslovom (II) $a^2 = c^2$ i $tg\psi = \pm 1$. U saglasnosti sa definicijom divergencije (1 (14)) se u tom slučaju brzina u pravcu strujnice ne menja i ako uzmemo još u obzir to da se u linearnom strujnom polju vektor brzine sa otstojanjem od centra linearno menja, onda vidimo da ovakvo strujno polje izgleda ovako kao što je prikazano na sl. 84.



Sl. 84. Linearno strujno polje sa pravolinijskim strujnicama

Posmatrano polje sastoji se iz polja deformacije i rotacije jednakog intenziteta. Ono pretstavlja granični slučaj polja koja su prikazana na slikama 82 D i G i 83 B i E.

Konačno nam preostane da proučimo još slučaj

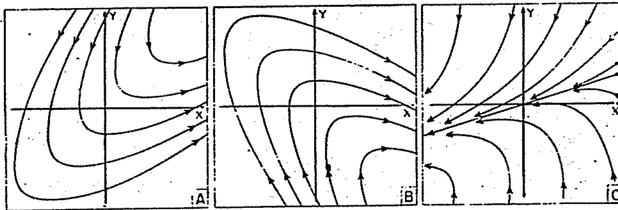
(II^2) $$\frac{v_o}{u_o} \neq - \frac{b - a}{c} = \frac{c}{a + b}$$

U tom slučaju jedn. (1) ne mogu biti ispunjene i nigde u polju nije ni u = 0 ni v = 0. Ako pišemo

$$\frac{v_o}{u_o} = \frac{c}{a + b} + K$$

gde je K neka konstantna vrednost i ovo uzmemo u obzir u jedn. 1 (7), onda vidimo da je polje (II^2) superpozicija polja (II^1) i polja translacije.

Postoje razne mogućnosti takvog polja i tri od ovih prikazane su na sl. 85 (prema S. Petterssenu). Slike A i B odnose se na slučaj b = 0 i c = a odn. c = - a. Slika C važi za b < 0 i c > 0.



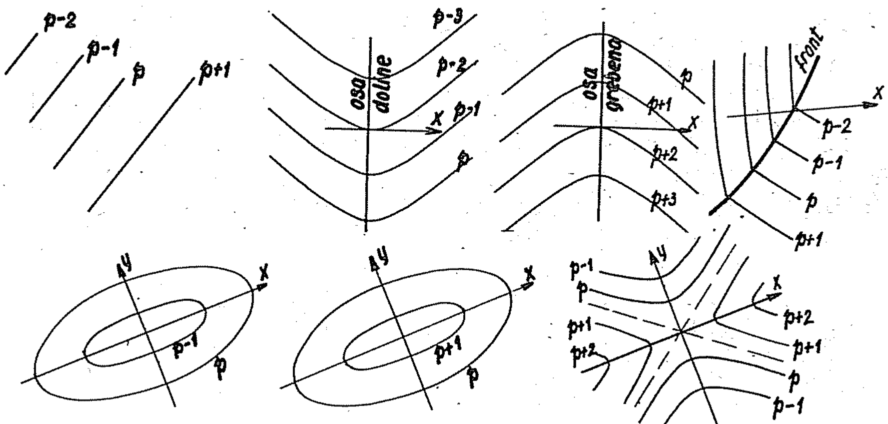
Sl. 85. Prikaz linearnih strujnih polja u kojima je brzina svuda različita od nule

3. Kinematika polja pritiska

Posmatrajući sinoptičke vremenske karte vidimo da u atmosferi postoje razne mogućnosti u pogledu raspodele pritiska u horizontalnoj ravni. Tako možemo polje pritiska na većoj oblasti podeliti na pojedine delove gde postoje sledeći osnovni baričkí sistemi:

1. bezgradijentno polje ($\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$),
2. polje sa pravolinijskim izobarama (duž izobare $\frac{\partial p}{\partial x} : \frac{\partial p}{\partial y} = const$),
3. dolina niskog pritiska bez fronta (za svaku tačku na osi doline važi $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} > 0$ gde pravac x leži normalno na osu doline),
4. dolina niskog pritiska sa frontom ($p - p' = 0$ i $\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial x} > 0$, x = pravac koji seče front pod makojim nagibom, p, p' = pritisak neposredno s jedne odn. druge strane),
5. greben visokog pritiska (za svaku tačku na osi grebena važi $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} < 0$ gde pravac x leži normalno na osu grebena,
6. ciklon (za centar ciklona važi $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} > 0$, $\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} > 0$, x,y = dva makoja pravca kroz centar),
7. anticiklon (za centar anticiklona važi $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} < 0$, $\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} < 0$, x,y = dva makoja pravca kroz centar).
8. sedlo (za tačku na sedlu važi $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} > 0$, $\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} < 0$, x,y = osa usmerena u pravcu u kome se pritisak idući prema tački na sedlu smanjuje odn. povećava).

Primeri 2 do 8, idealizovani, prikazani su na sl. 86.



Sl. 86. Osnovni barički sistemi

Pripominjemo da greben sa frontom zbog dinamičkog graničnog uslova ne može da postoji.

Polje pritiska pretstavljamo sebi izobarama

(1) $$p = p(x,y,t) = \text{const}$$

a promene u polju pritiska izalobarama

(2) $$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}(x,y,t) = \text{const}$$

tj. linijama koje povezuju tačke sa jednakim lokalnim promenama pritiska u horizontalnoj ravni.

Na osnovu poznavanja baričkog (p) i izalobarskog ($\frac{\partial p}{\partial t}$) polja možemo zaključiti kako se slika baričkog polja u toku vremena menja. Ovim problemima posvetilo je pažnju više istraživača (Giao, 1929, Angervo, 1930, Petterssen, 1933). Ovde ćemo samo kratko prikazati glavne rezultate ovih istraživanja koji su od značaja za pravilno razumevanje ponašanja polja pritiska, tj. kinematike tog polja bez obzira na uzroke zašto postoje takve mogućnosti.

Zamislimo dva koordinatna sistema, S i S', sa z-osom usmerenom prema zenitu. Sistem S neka bude vezan za osmatrača koji je u odnosu na zemljino tle u stanju mirovanja, a sistem S' neka se kreće paralelno sistemu S brzinom $\vec{c}$ zajedno sa baričkim sistemom (srazmerno male oblasti). U jednom i drugom sistemu važe operatori

(3) $$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla \qquad \text{i} \qquad \frac{d'}{dt} = \frac{\partial'}{\partial t} + \vec{u}'\cdot\nabla'$$

Pošto su individualne i geometriske promene u jednom i drugom sistemu jednake,

(4) $$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} \qquad \text{i} \qquad \nabla = \nabla'$$

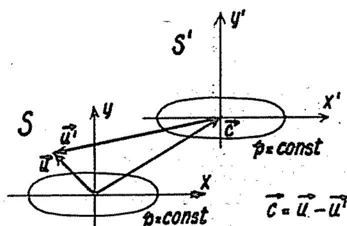
to iz (3) dobijamo da je brzina $\vec{c}$ vezana za operator (sl. 87)

(5) $$\vec{c}\cdot\nabla = (\vec{u} - \vec{u}')\cdot\nabla = \frac{\partial'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}$$

Ako x-osu izaberemo u pravcu brzine $\vec{c}$, onda odavde dobijamo za intenzitet te brzine

(6) $$c = \left(\frac{\partial'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\right) : \frac{\partial}{\partial x}$$

Pomoću dobivenog obrasca možemo izračunati brzinu c kojom se premeštaju razni barički sistemi.



Sl. 87. Izračunavanje brzine premeštanja baričnog sistema

Za pojedine baričke sisteme su karakteristične gore navedene veličine. Ako nas interesuje napr. brzina premeštanja izobare, onda treba naš operator primeniti na jednačinu (1), prema kojoj treba da bude $\frac{\partial p'}{\partial t} = 0$. Da bismo dobili tu brzinu treba pravac x očigledno usmeriti normalno na izobaru. Na taj način dobijamo za przinu premeštanja

izobare $$c = -\frac{\partial p}{\partial t} : \frac{\partial p}{\partial x}$$

Slično dobijamo za brzinu premeštanja

izalobare $$c = -\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} : \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t}$$

doline ili grebena $$c = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} : \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

fronta $$c = -\left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial p'}{\partial t}\right) : \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial x}\right)$$

I u ovim slučajevima treba x-osu usmeriti normalno na liniju.

Cikloni i anticikloni obično su eliptičnog oblika. Zbog toga možemo smatrati da se centar ciklona odn. anticiklona nalazi na preseku osa dve doline odn. dva grebena. Slično se tačka na sedlu nalazi na preseku ose doline i ose grebena. Da bi našli brzinu premeštanja centara ovih baričkih sistema, treba potražiti gde se posle jedinice vremena nalaze te ose. Na odgovarajućim presecima naći ćemo centre. Prema tome su komponente brzine premeštanja

ciklona, anticiklona i sedla $$c_x = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} : \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad \text{i} \quad c_y = -\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial t} : \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$

Ovde su x i y ose dolina i grebena koje smatramo da stoje normalno jedna na drugoj.

Iz dobivenih jednačina vidimo da se premeštanje centra ciklona gde je specijalno

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} > 0$$

vrši u pravcu izalobarskog gradijenta $\vec{G}_i = -\nabla\frac{\partial p}{\partial t}$. Kada je pak prva vrednost veća odn. manja od druge centar ciklona se premešta u prostor koji leži između pravca izalobarskog gradijenta i pozitivne y-odn. x-ose. Slična pravila važe za premeštanje anticiklona i sedla.

Postoje i obrasci za izračunavanje ubrzanja, ali oni ne daju u praksi dobre rezultate.

4. Frontogeneza i frontoliza

Vazduh se u atmosferi kreće pod najraznovrsnijim uslovima. Prilikom kretanja dolazi do promena u raspodeli temperature, na nekim mestima izotermne površine se približavaju, na drugim se udaljuju jedna od druge, negde neke iščezavaju a na drugim mestima pojavljuju se nove. Sve to zavisi od dovođenja i odvođenja toplote, od kondenzacije i isparavanja i uopšte od uslova pod kojima se vazduh u atmosferi kreće.

Posmatrajmo ovde horizontalno polje strujanja. U takvom strujnom polju izoterme se približavaju jedna drugoj odn. udaljuju jedna od druge na onim mestima gde je

(1) $$F = \frac{d|\nabla T|}{dt} > \text{ odn. } < 0$$

($|\nabla T|$ = intenzitet horizontalnog temperaturnog gradijenta $-\nabla T$). Ako je F duž neke linije veće odn. manje nego u okolini, govorimo o

frontogenezi odn. frontolizi duž linije. Uslov za frontogenezu i frontolizu duž linije (koja se zove linija frontogeneze odn. frontolize) je prema tome taj da je duž linije frontogeneze

(2) $$F > 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial n} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} < 0$$

a duž linije frontolize

(3) $$F < 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial n} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} > 0$$

gde je n osa u pravcu horizontalnog temperaturnog gradijenta. Često možemo smatrati da je prilikom horizontalnog kretanja vazduha individualna promena temperature jednaka nuli. U tom slučaju je

(4) $$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial n} v_n = 0$$

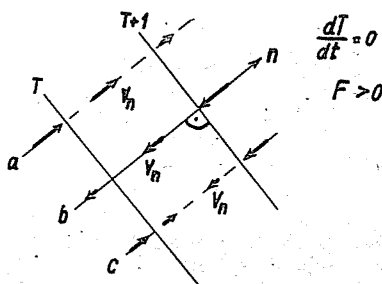
(v_n = komponenta brzine u pravcu n), Ako od sada n usmerimo u pravcu temperaturnog ascendenta, tj. ovako da se sa n temperatura povećava, onda možemo pisati

(5) $$|\nabla T| = \frac{\partial T}{\partial n}$$

i u saglasnosti sa jedn. (1), (5) i (4)

(6) $$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right) + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right) v_n = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial n} v_n\right) - \frac{\partial T}{\partial n}\frac{\partial v_n}{\partial n} = -\frac{\partial T}{\partial n}\frac{\partial v_n}{\partial n}$$

Vidimo da frontogeneza može da postoji samo tamo gde je $\frac{\partial v_n}{\partial n} < 0$, gde se, drugim rečima, komponenta brzine u pravcu ascendenta temperature smanjuje (sl. 88). To važi, svakako, samo pod uslovom (4). Za frontogenezu je potrebno još da je F maksimum. U oblasti strujnog polja gde je $\frac{\partial v_n}{\partial n}$ = const je to moguće samo tamo gde je gradijent temperature najveći. U takvom polju je prema tome pod gornjim uslovima frontogeneza moguća samo pod uslovom da temperatura nije linearna funkcija x-a i y-a.



Sl. 88. Potrebni uslovi za frontogenezu

Između oblasti gde je temperatura najveća i oblasti gde je temperatura najmanja leži oblast sa maksimalnim temperaturnim gradijentom i tamo su najpovoljniji uslovi za frontogenezu (između dve različito zagrejane vazdušne mase).

Kao što smo videli, komponente brzine u pravcu glavnih osa linearnog strujnog polja su (1 (7))

(7) $$u = u_0 + ax + bx - cy$$
$$v = v_0 - ay + by + cx$$

Ako su

(8) $p = \cos\alpha$ i $q = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

cosinusi uglova koje zaklapaju komponente brzine $\vec{u}$ sa pozitivnim pravcem **n**, onda je očigledno (sl. 89)

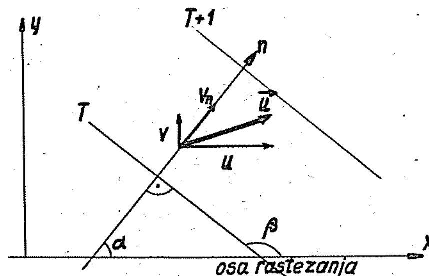
(9) $v_n = up + vq$

i

(10) $\frac{\partial v_n}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} p + \frac{\partial v}{\partial n} q$

Ako uzmemo u obzir da je

(11) $$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} p + \frac{\partial u}{\partial y} q$$
$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x} p + \frac{\partial v}{\partial y} q$$



Sl. 89

i da u saglasnosti sa jedn. (8) važi

(12) $p^2 + q^2 = 1$ i $p^2 - q^2 = -\cos 2\beta$ $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$

onda unošenjem ovih vrednosti u jedn. (10) i dobivene vrednosti za $\frac{\partial v_n}{\partial n}$ u jedn. (6) dobijamo

(13) $$F = \frac{\partial T}{\partial n}(a \cos 2\beta - b)$$

Videli smo da je $a >$ odn. < 0 ako je x osa rastezanja odn. stezanja. Ovde ćemo smatrati da je x osa rastezanja, da je prema tome u svakom slučaju $a > 0$.

Iz dobivene jednačine (13) vidimo među ostalim da translacija (u_0, v_0) i rotacija (c) ne utiču na otstojanje izotermi, da deformacija (a) u nekim sektorima ($\cos 2\beta > 0$) utiče u smislu približavanja, a u drugim ($\cos 2\beta < 0$) u smislu udaljavanja izotermi jedne od druge, da konvergencija ($b < 0$) utiče u smislu smanjivanja, a divergencija ($b > 0$) u smislu povećavanja međusobnog otstojanja izotermi.

U polju gde je $b > a$ izoterme se svuda udaljuju jedna od druge. U takvom polju (u oblasti visokog pritiska) pod uslovom (4) ne može doći do frontogeneze i eventualne frontalne zone iščezavaju. Kada je pak $b < a$, postoji u zavisnosti od orijentacije izotermi mogućnost i za frontogenezu i za frontolizu. Više o tome kaže nam izraz u zagradi jedn. (13) koji možemo pisati i u obliku

(14) $$a \cos 2\beta - b = \left(\pm\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} - tg\beta\right)\left(\pm\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + tg\beta\right)\frac{a+b}{1+tg^2\beta}$$

Odavde vidimo da se u slučaju $b < a$ i $a + b > 0$ (deformacija + divergencija ili deformacija jača od konvergencije) međusobno rastojanje izotermi za koje je

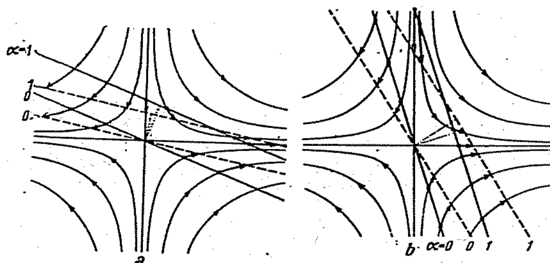
(15) $$-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} < tg\beta < \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

$$(16) \qquad \operatorname{tg}\beta < -\sqrt[+]{\frac{a-b}{a+b}} \quad \text{ili} \quad \operatorname{tg}\beta > \sqrt[+]{\frac{a-b}{a+b}}$$

povećava. U prvom slučaju postoji mogućnost za frontogenezu, a u drugom za frontolizu.

Često imamo priliku da na sinoptičkim vremenskim kartama posmatramo razna deformaciona strujna polja. Na slikama 90 a i b prikazana je frontogeneza i frontoliza u elementarnom polju deformacije (sl. 75). Tada je

$$b = 0 \quad i \quad \sqrt[+]{\frac{a-b}{a+b}} = 1$$



Sl. 90. a) frontogeneza, b) frontoliza

Više o frontogenezi biće govora u drugom delu udžbenika.

5. Menjanje gradijenta pritiska i s tim u vezi vetra sa visinom - termički vetar

Važno je pitanje kako se u atmosferi menja gradijent pritiska i s tim u vezi vetar sa visinom. Na osnovu pilot-balonskih i drugih posmatranja znamo da se u atmosferi vetar menja sa visinom na razne načine. Menja se zbog sila trenja i zbog menjanja horizontalnog gradijenta pritiska sa visinom.

S obzirom na tačnost merenja možemo uvek pretpostaviti da se u atmosferi pritisak menja sa visinom u saglasnosti sa barometarskom formulom. Polazeći od osnovne jednačine statike dobijamo za promenu horizontalnog gradijenta pritiska sa visinom

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial z}(-\nabla_h p) = \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right] = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right] = \left[g\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}, \frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)\right]$$

što znači:

1. Promena horizontalnog gradijenta pritiska sa visinom srazmerna je intenzitetu horizontalnog ascendenta gustine i po pravcu i smislu podudara se sa tim ascendentom (sl.91).

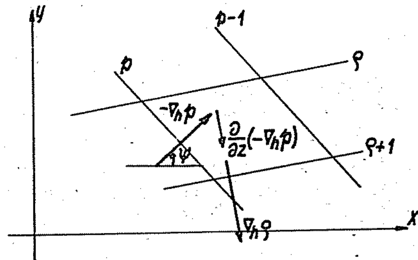
Prvo je sada pitanje od čega zavisi menjanje pravca horizontalnog gradijenta pritiska sa visinom.

Neka bude ψ ugao koji gradi horizontalna x-osa sa horizontalnim gradijentom pritiska (sl. 91). Kad uzmemo u obzir da je tada

$$tg\psi = \frac{\partial p}{\partial y}:\frac{\partial p}{\partial x}$$

to u saglasnosti sa jedn. (1), diferenciranjem dobijamo

$$(2)\quad \frac{1}{\cos^2\psi}\frac{\partial\psi}{\partial z} = g\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial\varrho}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right):\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 = g(\nabla\varrho\times\nabla p)_z:\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2$$



Sl. 91. Menjanje horizontalnog gradijenta pritiska sa visinom

ili uz primenu jedn. stanja vazduha

$$(3)\quad \frac{1}{\cos^2\psi}\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{g\varrho}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\right):\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 = \frac{g\varrho}{T}(\nabla p\times\nabla T)_z:\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2$$

Ako uzmemo u obzir definiciju za vektorski proizvod dva vektora, vidimo odavde sledeće:

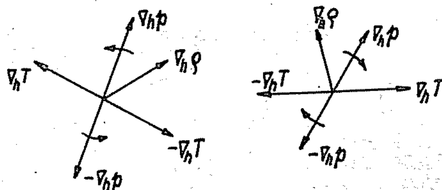
2. Pravac horizontalnog gradijenta pritiska sa visinom se samo tada menja kada izoterme a time i izostere ne leže paralelno sa izobarama. Menja se u smislu smanjivanja ugla između horizontalnog gradijenta pritiska i horizontalnog ascendenta gustine, tj. u smislu smanjivanja ugla između horizontalnog gradijenta pritiska i horizontalnog gradijenta temperature (sl. 92).

Vidimo da se horizontalni gradijent pritiska sa visinom usmerava na onu stranu gde su temperature niske i gustine velike. To je posledica bržeg opadanja pritiska sa visinom u gušćem i hladnijem vazduhu nego u ređem i toplijem. Zbog toga su na većim visinama u atmosferi izoterme približno paralelne sa izobarama.

Kako brzo se menja pravac horizontalnog gradijenta pritiska sa visinom vidimo iz sledećeg primera:

Pri pritisku p = 1000 mb i temperaturi T = 273° aps. neka bude $-\frac{\partial p}{\partial x} = \pm 1$ mb/100 km, $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial y} = -1°$C/100 km. Pod ovim uslovima je $\frac{\partial\psi}{\partial z} = \pm 2{,}7$ stepeni na 100 m.

Jednostavno nalazimo i jačinu menjanja intenziteta horizontalnog gradijenta pritiska sa visinom.



Sl. 92. Određivanje menjanja pravca horizontalnog gradijenta pritiska sa visinom

Ako x-osu usmerimo u pravcu horizontalnog ascendenta pritiska, tako da je

$$(4)\qquad |\nabla_h p| = \frac{\partial p}{\partial x}$$

onda u saglasnosti sa jedn. (1) i jednačinom stanja vazduha dobijamo za promenu intenziteta horizontalnog gradijenta pritiska prilikom promene visine za jedinicu

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = - g\frac{\partial \varrho}{\partial x} = - g\varrho\left(\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{5}$$

Odavde vidimo dalje

3. Kada se u pravcu i smislu delovanja horizontalnog gradijenta pritiska gustina vazduha povećava, intenzitet tog gradijenta sa visinom se povećava i obratno.

4. Intenzitet horizontalnog gradijenta pritiska sa visinom se ne menja kada se u pravcu tog gradijenta gustina ne menja, tj. kada je u tom pravcu relativna promena pritiska jednaka relativnoj promeni temperature.

5. Promenu intenziteta horizontalnog gradijenta pritiska sa visinom možemo tumačiti kao rezultantu iz dva dela: iz jednog koji uvek utiče u smislu smanjivanja intenziteta i drugog koji iščezava u izotermnoj atmosferi ili tada kada izoterme leže u pravcu gradijenta.

U troposferi se temperatura smanji od ekvatora do pola leti za oko 25 do 30°C, a zimi za oko 40°C. U pravcu prema polu je zbog toga $-\frac{\partial T}{\partial x}$ oko 0,25 do 0,30 leti i oko 0,40°C/100 km zimi. Posmatranja su pokazala da se u proseku gradijent pritiska sa visinom ne menja mnogo. Ako je napr. $p = 1000$ mb odn. 500 mb (visina između 5 i 6 km), $T = 280$ odn. 250° aps. i $\frac{\partial T}{\partial x} = -0{,}4$°C/100 km, onda se horizontalni gradijent pritiska sa visinom ne bi menjao kada bi se pritisak u pravcu prema severu smanjio na svakih 100 km za $-\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p}{T}\frac{\partial T}{\partial x} = 1{,}4$ mb odn. 0,8 mb. Zimi, kada su temperaturske razlike između ekvatora i pola veće, su i gradijenti pritiska prema severu jači, a time su i <u>zonalna strujanja</u> (strujanja u pravcu zapad-istok) jača.

Dobivene rezultate možemo sada primeniti za izračunavanje menjanja vetra sa visinom u vezi sa menjanjem gradijenta pritiska sa visinom. Ali, u ovom pogledu zadovoljićemo se samo približnim rezultatima, pošto ćemo smatrati da u atmosferi na svim visinama duvaju približno geostrofski vetrovi. Smatraćemo prema tome, da je u koordinatnom sistemu za koji je vezana jedn. (4), u saglasnosti sa definicijom geostrofskog vetra VIII-1 (3), brzina strujanja vazduha

$$v \doteq v_g = \frac{1}{f\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{6}$$

Vetar duva u pravcu izobara i zajedno s njima menja pravac sa visinom. Ako vrednost (6) uzmemo u obzir u jedn. (3), dobijamo da se prilikom promene visine za jedinicu pravac vetra promeni za

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{g}{fTv}\frac{\partial T}{\partial y} \tag{7}$$

6. Pravac vetra sa visinom menja se na severnoj hemisferi udesno, tj. u negativnom smislu gledajući od gore na dole, kada vazduh struji prema nižim temperaturama. Kada vazduh struji prema višim temperaturama, sa visinom skreće ulevo. Na južnoj hemisferi skretanje vetra sa visinom vrši se u suprotnom smislu.

Sem u prizemnom sloju vazduha možemo često smatrati da se temperatura vazduha koji se kreće horizontalno u toku vremena vrlo malo menja. Ako smatramo da je ta promena jednaka nuli, da je dakle

(8) $$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y} v = 0$$

onda u saglasnosti sa jedn. (7) možemo pisati

(9) $$\frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{f T v^2}{g} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

7. U slučaju horizontalnog izotermskog strujanja vazduha je lokalna promena temperature srazmerna kvadratu brzine vetra i promeni pravca vetra sa visinom. Na severnoj hemisferi znači skretanje vetra sa visinom udesno advekciju toplog vazduha a ulevo advekciju hladnog vazduha. Na južnoj hemisferi skretanje vetra sa visinom vrši se u suprotnom smislu.

Ako je napr. $\varphi = \pm 45^o$, $T = 280^o$ aps., $v = 10$ m sec^{-1} i $\frac{\partial \psi}{\partial z} = \pm 1^o$ /100 m onda je $\frac{\partial T}{\partial t} = \mp 0{,}17^o$C/čas.

Iz jedn. (5) i (6) dobijamo dalje posle kraćeg izračunavanja, kad uzmemo u obzir jednačinu za menjanje gustine vazduha sa visinom (str. 69),

(10) $$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{g}{fT}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{v}{T}\frac{\partial T}{\partial z} \quad \text{ili} \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v}{T}\right) = \frac{g}{fT^2}\frac{\partial T}{\partial x}$$

Ako je napr. $\varphi = 45^o$, $T=280^o$, $\frac{\partial T}{\partial x} = \pm 0{,}5^o$C/100 km, $v = 10$ m sec^{-1} i $\frac{\partial T}{\partial z} = - 0{,}5^o$ /100 m, onda je $\frac{\partial v}{\partial z} = \pm 0{,}18 - 0{,}018$ m sec^{-1}/100 m. U ovom slučaju je drugi član koji potiče od vertikalnog temperaturnog gradijenta po apsolutnoj vrednosti deset puta manji od prvog. On je i inače vrlo mali. Pri $\gamma = 1^o$C/100m bio bi pod inače jednakim uslovima svega 0,35 m sec^{-1}/1000 m, što je ispod granice tačnosti merenja. Zbog toga se taj član često zanemaruje i mesto jedn. (10) piše

(11) $$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{g}{fT}\frac{\partial T}{\partial x}$$

8. Menjanje jačine vetra sa visinom zavisi prvenstveno od horizontalne komponente temperaturnog gradijenta u pravcu horizontalnog gradijenta pritiska, koji leži normalno ili približno normalno na strujnice.

Kao što je menjanje jačine vetra sa visinom mera za menjanje temperature u horizontalnom pravcu normalno na strujnice, tako je menjanje pravca vetra sa visinom mera za menjanje temperature u samom pravcu strujanja vazduha, a time i za advekciju hladnog odn. toplog vazduha.

Vektor brzine geostrofskog vetra izražen pomoću koordinata x i y, proizvoljno orijentisanih u horizontalnoj ravni, je (str.140)

(12) $$\vec{u} = \left(- \frac{1}{f\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{1}{f\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, 0\right)$$

U saglasnosti sa jedn. (10) dobijamo odavde

(13) $$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\vec{u}}{T}\right) = \frac{g}{fT^2}\left(- \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial x}, 0\right)$$

Odavde dobijamo vektor koji nam daje promenu vetra sa visinom na jedinicu rastojanja

(14) $$\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \frac{g}{fT}\left(-\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{fu}{g}\frac{\partial T}{\partial z},\ \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{fv}{g}\frac{\partial T}{\partial z},\ 0\right)$$

U slučaju da se temperatura sa visinom ne menja je

(15) $$\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \frac{g}{fT}\left(-\frac{\partial T}{\partial y},\ \frac{\partial T}{\partial x},\ 0\right) = \frac{g}{fT}\,\vec{k} \times \nabla T$$

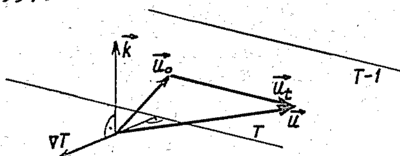
Kao što smo videli, menjanje temperature sa visinom malo utiče na menjanje vetra sa visinom. Zbog toga ovaj obrazac važi sa dovoljnom tačnošću uopšte.

9. Promena vektora brzine sa visinom paralelna je izotermama i usmerena je tako da leže niske temperature na levoj odn. na južnoj hemisferi na desnoj strani (sl. 93).

Integralenjem jedn. (13) od visine z = 0 do visine z gde je temperatura T dobijamo vetar na visini z:

$$\vec{u} = \left(\frac{T}{T_o}u_o + u_t,\ \frac{T}{T_o}v_o + v_t,\ 0\right)$$

(T_o, u_o, v_o = odgovarajuće vrednosti na visini z = 0) gde je



Sl. 93. Termički vetar u polju temperature

(16) $$\vec{u}_t = (u_t,\ v_t,\ 0) = \frac{gT}{f}\left(-\int_0^z \frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial y}\,dz,\ \int_0^z \frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x}\,dz,\ 0\right)$$

tzv. termički vetar. U slučaju da se temperatura i gradijent temperature sa visinom ne menja, dobijamo za termički vetar jednostavnu vrednost

(17) $$\vec{u}_t = \frac{gz}{fT}\left(-\frac{\partial T}{\partial y},\ \frac{\partial T}{\partial x},\ 0\right)$$

U tom slučaju je (sl. 93)

(18) $$\vec{u} = \vec{u}_o + \vec{u}_t$$

XIII. UVOD U ENERGETIKU ATMOSFERE

1. Bernoulli-Bjerknes-ova jednačina i potencijalna energija raspodele vazdušnog pritiska

Svako kretanje vazduha u atmosferi praćeno je stalnom razmenom energije između vazduha i okolne sredine. Kao posledica te razmene menja se energetsko stanje, tj. ukupna sadržina energije vazduha. Ovde se pitamo kako dolazi do promene kinetičke energije.

Množenjem Euler-ove hidrodinamičke jednačine za kretanje vazduh bez trenja skalarno vektorom brzine $\vec{u}$ dobijamo jednačinu kinetičke energije delića

(1) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{2}\right) = -\nabla \phi \cdot \vec{u} - \alpha \nabla p \cdot \vec{u}$$

koju možemo pisati i u obliku

(2) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{2} + gz\right) = -\alpha \frac{\partial p}{\partial s} u$$

($-\frac{\partial p}{\partial s}$ = komponenta gradijenta pritiska u pravcu strujanja).

U jednačini (2) nam leva strana pretstavlja individualnu promenu zbira iz kinetičke i težinske potencijalne energije jedinice mase. Šta znači desna strana?

Svaki delić vazduha u atmosferi sadrži pored težinske potencijalne energije (pošto se nalazi u polju zemljine teže) još jednu potencijalnu energiju. Ova druga potencijalna energija, koja se prema Margulesu zove potencijalna energija raspodele vazdušnog pritiska, a koju neki autori nazivaju baričkom potencijalnom energijom, javlja se zbog toga što se delić nalazi u polju vazdušnog pritiska.

Kad zanemarimo sile trenja i otpora sredine, za vreme horizontalnog kretanja vazduha od visokog ka niskom atmosferskom pritisku, vazduh dobija na kinetičkoj energiji, pa iako se pri tome težinska potencijalna energija ništa ne menja. Vidimo da vazduh u oblasti visokog atmosferskog pritiska sadrži neku potencijalnu energiju, tj. potencijalnu energiju raspodele vazdušnog pritiska, koja se prilikom kretanja vazduha prema niskom pritisku oslobađa i smanjuje. Suprotno tome se prilikom kretanja vazduha prema visokom pritisku povećava.

Slično kao što svaki delić vazduha dobija na težinskoj potencijalnoj energiji kada se kreće u suprotnom smislu delovanja sile zemljine teže tako svaki delić vazduha dobija na potencijalnoj energiji raspodele vazdušnog pritiska kada se kreće u suprotnom smislu delovanja gradijentne sile. Pošto na vazdušni delić mase m sa zapreminom V deluje u pravcu kretanja u smislu dejstva vektora brzine komponenta gradijentne sile $-V\frac{\partial p}{\partial s} = -m\alpha\frac{\partial p}{\partial s}$, koja na putu ds obavi rad $-m\alpha\frac{\partial p}{\partial s}ds$, to se na tom putu potencijalna energija raspodele vazdušnog pritiska (u smislu Margules-ove definicije) promeni za

(3) $$dB_m' = m\alpha \frac{\partial p}{\partial s} ds$$

Na osnovu izloženog vidimo da desnu stranu jedn. (2) možemo tumačiti kao negativnu individualnu promenu potencijalne energije raspodele vazdušnog pritiska jedinice mase B' koja se u jedinici vremena pojavi.

Pod pretpostavkom da se vazduh kreće adijabatski (uvek $\frac{dQ}{dt} = 0$) u stacionarnom polju pritiska (svuda i uvek $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$), možemo jednačinu (2) lako integraliti. Prema prvom principu termodinamike važi u ovom slučaju

(4) $$\frac{dB'}{dt} = \alpha \frac{\partial p}{\partial s} u = \alpha \frac{dp}{dt} = c_p \frac{dT}{dt}.$$

tako da mesto jedn. (2) možemo pisati

(5) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{2} + \overline{\emptyset} \right) = 0$$

gde je $\overline{\emptyset}$ ranije (str. 94) definisana ukupna potencijalna energija delića vazduha jedinice mase (Montgomery-jev potencijal):

(6) $$\overline{\emptyset} = c_p T + gz$$

Integraljenjem jedn. (5) kad uzmemo u obzir jedn. (6) dobi - jamo jednačinu kinetičke energije delića pod navedenim uslovima

(7) $$\frac{u^2}{2} + gz + c_p T = \frac{u_o^2}{2} + gz_o + c_p T_o$$

Ova jednačina povezuje vrednosti pojedinih veličina stanja jednog te istog vazdušnog delića u dva različita trenutka vremena (vrednosti se odnose na dva trenutka vremena i jedanput su označene bez indeksa a drugi put sa indeksom). Iz jednačine vidimo da je za vreme adijabatskog kretanja vazduha bez trenja u stacionarnom polju pritiska zbir iz kinetičke energije, težinske potencijalne energije i potencijalne energije raspodele atmosferskog pritiska konstantan. Kinetička energija delića može se menjati samo na račun ukupne potencijalne energije delića.

Pošto je

(8) $$c_p T = (c_p - c_v)T + c_v T = \frac{p}{\varrho} + c_v T$$

to jedn. (7) možemo pisati i u obliku

(9) $$\frac{u^2}{2} + gz + \frac{p}{\varrho} + c_v T = \frac{u_o^2}{2} + gz_o + \frac{p_o}{\varrho_o} + c_v T_o$$

Ova jednačina potseća na Bernoulli-evu jednačinu za nestišljivu tečnost ($\varrho = \varrho_o$) koja ne sadrži član sa temperaturom. Prvi ju je izveo V. Bjerknes (1917) i u meteorologiji je poznata pod imenom Bernoulli-Bjerknes-ova jednačina.

Integraljenjem po vremenu t jednačine (2) dobijamo još jedan oblik Bernoulli-Bjerknes-ove jednačine koja se za obična numerička izračunavanja obično upotrebljava pod gornjim uslovima. Ona glasi

(10) $$\frac{u^2}{2} + gz + \frac{p}{\varrho} = \frac{u_o^2}{2} + gz_o + \frac{p_o}{\varrho}$$

gde pod ϱ treba podrazumevati srednju gustinu.

Primena jedn. (10) u meteorologiji je svestrana. Prvenstveno se primenjuje za izračunavanje pritiska zastoja, tj. porasta ili smanjenja pritiska ispred i iza raznih prepreka. Još neposrednije vidi se koliki može da bude uticaj zastoja na vazdušni pritisak iz jedn. (2) prema kojoj se promena pritiska na putu ds sastoji iz dva dela, iz promene zbog opadanja pritiska sa visinom u saglasnosti sa osnovnom jednačinom statike (statički deo) i iz promene zbog menjanja brzine (dinamički deo). Vidimo da se promena pritiska u deliću pojavljena na putu s sastoji iz dve parcijalne promene, pri čemu je parcijalna promena zbog zastoja (= pritisak zastoja)

(11) $$(p - p_o)_d = \varrho(u_o^2 - u^2):2$$

Ako je napr. brzina vazduha na početku (na visini z_o, u vremenu t_o) $u_o = 10$ m sec^{-1}, a na kraju (na visini z u vremenu t) $u = 0$ i ako je na putu srednja gustina $\varrho = 1$ kg m^{-3}, onda je zbog zastoja na visini z pritisak za 0,5 mb veći nego što bi bio tamo kada zastoj na pritisak ne bi uticao. Pri dva, tri,... puta većoj brzini taj porast na mestu potpunog zastoja bio bi 4,9,... puta veći.

Prilikom horizontalnog kretanja kinetička energija može pod posmatranim uslovima da se menja samo na račun baričke potencijalne energije. Barička potencijalna energija je dakle jedan od izvora kinetičke energije i zbog toga zaslužuje našu posebnu pažnju.

Zamislimo da u atmosferi u stacionarnom polju pritiska delić vazduha jedinice mase adijabatski prenesemo na vrh atmosfere. U saglasnosti sa definicijom (3) na tom putu s barička potencijalna energija promeni se za

(12) $$-B = \int_0^s \alpha \frac{\partial p}{\partial s} ds \qquad (\text{svuda na putu } \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \text{ i } \frac{dQ}{dt} = 0)$$

Ako uzmemo u obzir da je u našem slučaju u saglasnosti sa prvim principom termodinamike

(13) $$\alpha \frac{\partial p}{\partial s} ds = \alpha dp = dH \qquad (\frac{\partial p}{\partial t} = 0,\ dQ = 0)$$

(dH = promena enthalpije na putu ds), onda vidimo da je

(14) $$B = H - H_v$$

gde su H i H_v enthalpija delića na mestu posmatranja (na početku puta s) odn. na vrhu atmosfere. Vrednost H_v je očigledno u poređenju sa H mala i može se zanemariti tako da sa dovoljnom tačnošću važi

(15) $$B \doteq H$$

Vrednost B pretstavlja baričku potencijalnu energiju delića vazduha jedinice mase u atmosferi u stacionarnom polju pritiska u odnosu na vrh atmosfere pod pretpostavkom da se kretanje vrši adijabatski prilikom prenosa. Ta vrednost jednostavno je jednaka enthalpiji delića. To je veličina stanja i jednoznačno je određena.

U tom specijalnom slučaju barička potencijalna energija poprima karakter potencijala, kao što je F. M. Exner, austriski meteorolog teoretičar, već 1917. god. primetio.

Ako posmatramo baričku potencijalnu energiju u vezi sa jedn. (15), vidimo da ona znači nešto drugo nego barička potencijalna energija definisana jedn. (3). Prema jedn. (15) ta energija može da se menja i tada kada je vazduh u stanju mirovanja (prilikom dovođenja i odvođenja toplote i menjanja sadržine vodene pare u deliću). Što veća je enthalpija, to veća je i energija B.

Jedn. (15) možemo upotrebiti za novu definiciju baričke potencijalne energije i to ne samo za specijalni slučaj stacionarnog polja pritiska već uopšte (Čadež, 1952). U opštem slučaju možemo naime vrednost B tumačiti kao rad koji vrši sila pritiska prilikom adijabatskog prenosa jedinice mase vazduha na vrh atmosfere i to pod pretpostavkom da se nigde na putu ne pojavljuje lokalna promena atmosferskog pritiska.

U saglasnosti sa jedn. (15), definicijom enthalpije i prvim principom termodinamike u jedinici vremena barička potencijalna energija vazduha jedinice mase promeni se za

(16) $$\frac{dB}{dt} = \alpha\frac{\partial p}{\partial s}u + \alpha\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{dQ}{dt}$$

Do promene baričke potencijalne energije može dakle doći iz tri različita uzroka: zbog kretanja u polju pritiska, zbog lokalne promene pritiska i zbog dovođenja ili odvođenja toplote. To su pojave koje potiču od okolne sredine, a na koje delić vazduha na svoj način reaguje. Reagovanje delića manifestuje se u promenama veličina stanja, kao što su temperatura i specifična vlažnost i u promeni stanja kretanja.

Vidimo da postoji vrlo intimna i uzročna veza između pojava u okolnoj sredini i stanja u kome se posmatrani delić nalazi. U svrhu pravilnog razumevanja tih odnosa treba pored navedenih da poznajemo još neke međusobne odnose delića vazduha i okolne sredine.

2. Veza između pretvaranja energije vazdušnog delića i okolne atmosfere - pojam spoljašnje energije

Prilikom adijabatskog kretanja delića vazduha u atmosferi u stacionarnom polju pritiska prema oblasti niskog pritiska barička potencijalna energija se u saglasnosti sa jedn. 1 (16) smanjuje. Pri tome se smanjuje i unutrašnja energija delića. Smanjuje se zbog toga što se zapremina delića pod dejstvom spoljašnjih sila pritiska povećava, a potrebna energija za vršenje ovog rada potiče iz unutrašnje energije delića (III-1). Ako bismo pod ovim uslovima delić vazduha preneli na vrh atmosfere ($p = p_v = 0$), unutrašnja energija delića jedinice mase U smanjila bi se za (III-1 (8))

(1) $$U - U_v = \int_0^s p\frac{d\alpha}{ds}ds \qquad (\text{svuda na putu } \frac{dQ}{dt} = 0)$$

gde možemo unutrašnju energiju na vrhu atmosfere U_v u poređenju sa U zanemariti.

Jednačina (1) potpuno je slična jednačini 1 (12). Ona važi uopšte, ako zamišljamo da se prenošenje delića vazduha na vrh atmosfere izvrši adijabatski.

Prilikom kretanja vazduha u atmosferi promena baričke potencijalne energije po jedinici mase određena je jedn. 1 (16) a promena unutrašnje energije, u saglasnosti sa prvim principom termodinamike, jednačinom

(2) $$\frac{dU}{dt} = - p\frac{d\alpha}{dt} + \frac{dQ}{dt}$$

Vidimo da za vazduh u atmosferi možemo prvi princip termodinamike tumačiti na dva načina. Jedan, koji je u vezi sa jedn. 1 (16), odnosi se na kinetičku energiju delića (1: (2) i (16)), a drugi na njegovu unutrašnju energiju, (2). U vezi sa jednačinama 1 (2) i (2) odn. jednačinama 1 (12) i (1) stojimo još pred jednim pitanjem koje je u vezi sa razmenom energije između delića i okolne atmosfere.

Videli smo (III-1) da zbog dejstva sila pritiska kojima atmosfera sa svih strana deluje na delić vazduha jedinice mase okolna atmosfera u jedinici vremena vrši rad

(3) $$\frac{dW}{dt} = -\alpha\nabla\cdot(p\vec{u}) = -\alpha\frac{\partial p}{\partial s}u - p\frac{d\alpha}{dt}$$

Ako je ovaj rad pozitivan, onda on znači gubitak energije okolne atmosfere koji je posledica izvršenog rada. Ako je pak vrednost (3) negativna, onda je kao posledica dejstva sila pritiska na posmatrani delić, delić predao okolnoj atmosferi energiju $-\frac{dW}{dt}$.

Iz jedn. (3) vidimo da svako kretanje vazduha u atmosferi ima za posledicu zbog dejstva sila pritiska menjanje energetskog stanja okolne atmosfere koje je u opštem slučaju dvojake prirode. Jedna promena je posledica dejstva gradijentne sile u pravcu kretanja, a druga promena je posledica menjanja zapremine delića vazduha. Kada se vazduh kreće prema oblasti niskog atmosferskog pritiska ($\frac{\partial p}{\partial s} < 0$), energetsko stanje se zbog dejstva gradijentne sile smanjuje (okolna atmosfera potiskuje vazduh), kada se pak kretanje vrši prema oblasti visokog pritiska zbog ovog efekta dolazi do povećavanja energetskog stanja okolne atmosfere. Kada se zapremina delića u toku vremena povećava ($\frac{d\alpha}{dt} > 0$), tada zbog ove pojave delić predaje energiju okolnom vazduhu. U slučaju smanjivanja zapremine delića prelazi odgovarajuća količina energije iz okoline u delić.

Upoređenjem vrednosti u jedn. (3) sa vrednostima koje nastupaju u jedn. 1 (2) i (2), vidimo da je prva vrednost

(4) $$\frac{dW_g}{dt} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial s}u$$

vezana za promene kinetičke i težinske potencijalne energije, a druga

(5) $$\frac{dW_p}{dt} = - p\frac{d\alpha}{dt}$$

za promenu unutrašnje energije delića i dovođenje toplote.

U svrhu procene vrednosti (4) i (5) izrazićemo prvo rad $\frac{dW_p}{dt}$ na drugi način i to pomoću jednačine V-2 (13) i V-4 (8). Ako masu vode koja se eventualno u čvrstom ili tečnom stanju nalazi u deliću vazduha jedinice mase u poređenju sa masom delića zanemarimo, možemo pisati

$$(6) \qquad p\,\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\left(\frac{dQ}{dt} - L\,\frac{1}{1-q_w}\frac{dq_w}{dt}\right) - \frac{1}{\varkappa}\alpha\frac{dp}{dt} + \frac{L_s}{1-q_w}\frac{dq_w}{dt}$$

Ukoliko vazduh vodenom parom nije zasićen promena specifične vlažnosti ne postoji. Vrednost (6) pretstavlja energiju koju delić jedinice mase zbog menjanja zapremine pod dejstvom spoljašnjih sila pritiska preda okolnoj atmosferi.

Zamislimo prvo da se vazduh u atmosferi kvazistatički i adijabatski u stacionarnom polju pritiska kreće vertikalno nagore (u = w). U tom slučaju je

$$(7) \qquad \frac{1}{w}\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial z} = -g\varrho' \quad , \qquad \frac{dQ}{dt} = 0$$

(ϱ' = gustina okolne atmosfere). Zbog toga je

$$(8) \qquad \frac{dW_g}{dt} = \frac{T_v}{T_v'}\,g\,w$$

i

$$(9) \qquad \frac{dW_p}{dt} = -\,0{,}71\,\frac{T_v}{T_v'}\,gw + \frac{0{,}29L - L_s}{1-q_w}\frac{dq_w}{dt}$$

Ako uzmemo u obzir da L_s pri atmosferskim temperaturama iznosi 4 do 5 stota dela od L i da je q_w u poređenju sa 1 malo možemo sa dovoljnom tačnošću pisati mesto (9)

$$(10) \qquad \frac{dW_p}{dt} = -\,0{,}71\,\frac{T_v}{T_v'}\,gw + \frac{L}{4}\frac{dq_w}{dt}$$

Ukoliko se kretanje vrši suvoadijabatski, drugi član na desnoj strani ne postoji. U tom slučaju i pod uslovom da je $T_v = T_v'$ zbog postojanja gradijentne sile atmosfera tačno toliko gubi na energiji koliko delić prilikom penjanja dobija na težinskoj potencijalnoj energiji, (8). Pošto se prilikom penjanja zapremina delića povećava, delić gubi na unutrašnjoj energiji i to u istom iznosu koliko jednovremeno dobija zbog tog širenja na energiji okolna atmosfera ((2) i (5)). Tim putem okolna atmosfera dobija energiju koja je po iznosu jednaka 71% od jednovremenog povećanja težinske potencijalne energije delića. Vidimo da prilikom takvog kretanja atmosfera deliću daje više energije nego što je jednovremeno od delića prima. U saglasnosti sa gornjim jednačinama je ukupni gubitak energije okolne atmosfere u jedinici vremena

$$(11) \qquad \frac{dW}{dt} = 0{,}29\,gw = \left(1 - \frac{c_v}{c_p}\right)gw$$

Jednovremeno povećanje sadržine energije delića sastoji se u razlici između povećanja težinske potencijalne energije (gw) i smanjenja unutrašnje energije ($-\,c_v dT{:}dt = c_v(g{:}c_p)\,w$). Ova razlika očigledno je jednaka vrednosti (11). Možemo napomenuti da prilikom takvog uzlaznog strujanja ne dolazi do promene kinetičke energije (zbog jednakosti virtuelnih temperatura slobodna sila potiska

ne postoji). Energija $\frac{dW_g}{dt}$ utrošena je za podizanje delića vazduha, a šta je sa energijom koju delić zbog širenja pod dejstvom sila pritiska predaje okolnoj atmosferi je pitanje od osnovnog značaja za pravilno razumevanje atmosferske dinamike uopšte. Ovu energiju tumači Čadež kao talasnu energiju ili energiju impulsa koja se zajedno sa pojavljenim kompresionim talasom brzinom zvuka udaljuje u okolnu sredinu (XI-6). Ovo tumačenje saopšteno je prvi put 1945. godine.

Prilikom vlažnoadijabatskog penjanja pored energije 0,71 gw delić pod navedenim uslovima predaje u okolinu još $\frac{L}{4}\frac{dq_w}{dt}$ energije u jedinici vremena. Ako je $L=600\cdot4187$, $\frac{dq_w}{dt}=-0{,}001$ kg/kg čas, onda zbog kondenzacije odlazi u okolinu 628 džaula. Ta energija jednaka je kinetičkoj energiji tela mase m = 50 kg koje se kreće brzinom 5 m/sec.

Kada delić vazduha prilikom kretanja u atmosferi apsorbuje toplotu, predaje zbog povećanja svoje zapremine u saglasnosti sa jedn. (6) i (5) u okolnu atmosferu 29% primljene energije. Slično prilikom emisije okolna sredina nadoknađuje 29% izgubljene energije deliću.

Svaki delić vazduha u atmosferi ima neku unutrašnju energiju, težinsku potencijalnu i baričku potencijalnu energiju, kinetičku energiju i možda još koju drugu vrstu energije. Ali, ukupna sadržina energije delića nije jednaka jednostavno zbiru svih navedenih vrsta energije:

U saglasnosti sa jedn. 1 (12), (1) i (3) prilikom adijabatskog prenosa delića vazduha u stacionarnom polju pritiska na vrh atmosfere delić predaje okolnoj atmosferi ukupno $U - U_v$ energije, a od atmosfere jednovremeno primi $B - B_v$ energije. Prilikom takvog prenosa delića na vrh atmosfere delić od atmosfere ne primi toliko energije koliko iznosi barička potencijalna energija već manje i to ukupno

$$(12) \quad Z = B - B_v - (U - U_v) = -\int_0^s \left(\alpha\frac{dp}{ds} + p\frac{d\alpha}{ds}\right)ds = p\alpha \qquad \left(\text{svuda na putu } \frac{\partial p}{\partial t} = 0,\ \frac{dQ}{dt} = 0\right)$$

Deliću dakle u okolnoj atmosferi ne stoji na raspoloženju energija $B - B_v \doteq B$ već samo energija $Z = p\alpha$. Za razliku od unutrašnje energije, ovu energiju možemo da zovemo spoljašnjom energijom (Čadež, 1952). Vidimo da je ukupna energija kojom raspolaže delić u atmosferi

$$(13) \qquad E = U + \emptyset + Z + K + F = H + \emptyset + K + F$$

(F = sadržina još ostalih vrsta energije kojim raspolaže delić vazduha jedinice mase). Za razliku od ostalih, energija Z ne nalazi se u samom deliću, već u okolnoj atmosferi stoji deliću na raspoloženju

Videli smo da se prilikom kretanja makog delića vazduha u atmosferi vrši stalna razmena energije između delića i okolne sredine. Ova razmena je posledica zračenja, toplotne provodljivosti, gravitacije, stišljivosti vazduha itd.

Neposredni uticaj zračenja na sadržinu energije delića je

srazmerno mali. Sem u prizemnom sloju vazduha je i neposredni uticaj toplotne provodljivosti na sadržinu energije delića srazmerno mali. Kao što smo videli, do velikih promena sadržine pojedinih vrsta energije delića dolazi prilikom menjanja visine deliće i zbog toga su baš uzlazna i nizlazna strujanja vazduha u atmosferi od posebnog značaja za energetiku i dinamiku atmosfere uopšte.

3. Jednačina energije sistema

Jedan od osnovnih meteoroloških problema je pitanje kako dođe do stvaranja olujnih vetrova u atmosferi. Ovome problemu bila je posvećena pažnja od strane raznih meteorologa, teoretičara i praktičara i prve osnove teorijskog rešenja dao je još na početku ovog veka jedan od prvih meteorologa teoretičara, austriski meteorolog Max Margules. Rezultati Margulesa imali su velikog uticaja na razvoj meteorološke misli u prvoj polovini ovog veka. Oni još danas pretstavljaju osnov za teorijska istraživanja energetike atmosfere.

Zamislimo deo atmosfere ograničen nekom (zamišljenom) površinom koja nigde u toku vremena ne menja svoj položaj u prostoru. U smislu Margules-ove definicije ovakav deo atmosfere smatraćemo zatvorenim sistemom. Zatvoreni sistem može, prema tome, da prima i daje toplotu, a na njegovoj granici je normalna komponenta vektora brzine na granicu svuda jednaka nuli. Kod otvorenog sistema normalna komponenta vektora brzine na granicu bar na nekim mestima nije jednaka nuli. Margules je vrlo iscrpno proučavao problem pretvaranja energije u zatvorenom sistemu (1901, 1903, 1906) i pri tome došao do izvesnih osnovnih jednačina i do koncepcije da glavni izvor olujnih vetrova u atmosferi kao i kinetičke energije ciklona umerenih širina treba tražiti u težinskoj potencijalnoj energiji različito zagrejanih vazdušnih masa. Danas postoje u tom pogledu različita gledišta, a o tome biće govora u drugom delu udžbenika.

Ovde ćemo uglavnom ići putem koji je pokazao Margules i dati jednačine za otvoreni, a time, kao specijalni slučaj, i za zatvoreni sistem.

Množenjem hidrodinamičke jednačine kretanja skalarno vektorom brzine $\vec{u}$ dobijamo

$$\varrho\frac{d}{dt}(\phi + \frac{u^2}{2}) + \nabla p\cdot\vec{u} = 0 \qquad (1)$$

(sile trenja koje deluju na vazduh nismo uzeli u obzir). Integraljenjem ove jednačine preko dela atmosfere konstantne zapremine V sa graničnom površinom koja u toku vremena nigde ne menja svoj položaj u prostoru dobijamo

$$\int_V \frac{d}{dt}(\phi + \frac{u^2}{2})\varrho dV + \int_V \nabla p\cdot\vec{u}\, dV = 0 \qquad (2)$$

Uzimanjem u obzir jednačine kontinuiteta možemo prvi integral u dobivenoj jednačini jednostavno da tumačimo:

Za makoju skalarnu veličinu ψ kao kontinuarnu funkciju koordinata x,y,z i vremena t za koju magde u polju postoje i prvi parcijalni izvodi po nezavisnim promenljivim važi očigledno

$$(3) \qquad \rho\frac{d\psi}{dt} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial t} + \rho\vec{u}\cdot\nabla\psi$$

Pošto je na drugoj strani u saglasnosti sa jednačinom kontinuiteta

$$\psi\nabla\cdot(\rho\vec{u}) + \psi\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

to mesto jedn. (3) možemo pisati

$$(4) \qquad \rho\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\psi\vec{u})$$

Množenjem ove jednačine sa dV i integraljenjem preko cele zapremine V dobijamo kad uzmemo u obzir Gaussov identitet

$$(5) \qquad \int_V \rho\frac{d\psi}{dt}dV = \int_V \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t}dV + \int_\sigma \rho\psi\vec{u}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

($\vec{n}$ = spoljašnja normala na graničnu površinu σ zapremine V). Ako uzmemo u obzir da je svaki element zapremine V, čije granična površina ne menja svoj položaj u prostoru, potpuno nezavisan od vremena, onda identitet (5) možemo pisati i u obliku

$$(5') \qquad \int_V \rho\frac{d\psi}{dt}dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\psi dV + \int_\sigma \rho\psi\vec{u}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

Ako sada mesto ψ pišemo $\emptyset + \frac{u^2}{2}$ onda nam jedn. (5') daje

$$(6) \qquad \frac{DP}{Dt} + \frac{DK}{Dt} = \int_V \frac{d}{dt}(\emptyset + \frac{u^2}{2})\rho dV - \int_\sigma (\emptyset + \frac{u^2}{2})\rho\vec{u}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

gde su

$$(7) \qquad \frac{DP}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \emptyset\rho dV \quad \text{i} \quad \frac{DK}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{u^2}{2}\rho dV$$

ukupne promene težinske potencijalne energije i kinetičke energije koje se u jedinici vremena u posmatranom prostoru zapremine V pojave. Vidimo da je integral iz individualne promene zbira težinske potencijalne i kinetičke energije svih delića vazduha koji se u datom trenutku vremena nalaze u posmatranom prostoru jednak zbiru dva člana. Jedan pretstavlja ukupnu promenu težinske potencijalne i kinetičke energije koja se jednovremeno u zapremini V pojavi, a drugi jednovremeni ukupni transport te dve vrste energije preko granične površine σ. Taj transport sastoji se u opštem slučaju iz razlike između transporta te dve vrste energije u zapreminu V i iz te zapremine. Transport se vrši brzinom strujanja vazduha normalno na graničnu površinu.

U saglasnosti sa Margules-ovom definicijom baričke potencijalne energije 1 (3) drugi integral u jedn. (2), tj. integral

(8) $$\frac{D'B'}{Dt} = \int_V \nabla p \cdot \vec{u}\, dV$$

pretstavlja ukupnu promenu baričke potencijalne energije svih delića vazduha koji se u datom trenutku vremena u prostoru zapremine V nalaze. Ako uzmemo u obzir jedn. prvog principa termodinamike 2 (2) i jednačinu za rad koji u jedinici vremena vrši okolna atmosfera zbog dejstva sila pritiska na delić vazduha jedinice mase 2 (3), vidimo da možemo izraz ispod znaka za integraljenje pisati u obliku

(9) $$\nabla p \cdot \vec{u} = \nabla \cdot (p\vec{u}) + \varrho \frac{dU}{dt} - \varrho \frac{dQ}{dt}$$

Kad uzmemo ovo u jedn. (8) u obzir, dobijamo posle primene Gauss-ove teoreme i identiteta (5)

(10) $$\frac{D'B'}{Dt} = \frac{DU}{Dt} - \frac{D'Q}{Dt} + \int_\sigma p\vec{u} \cdot \vec{n}\, d\sigma + \int_\sigma U \varrho \vec{u} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

Dobivena jednačina zove se termička jednačina otvorenog sistema.

Unošenjem vrednosti za promenu težinske potencijalne i kinetičke energije iz (6) i vrednosti za promenu baričke potencijalne energije (8) u jedn. (2) dobijamo jednačinu kinetičke energije otvorenog sistema

(11) $$\frac{DP}{Dt} + \frac{DK}{Dt} + \frac{D'B'}{Dt} = - \int_\sigma (\emptyset + \frac{u^2}{2}) \varrho \vec{u} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

Ako vrednosti za promenu baričke potencijalne energije zamenimo sa vrednostima iz termičke jednačine (10), dobijamo jednačinu energije vazduha u otvorenom sistemu

(12) $$\frac{D}{Dt}(U + P + K) = \frac{D'Q'}{Dt} + \int_\sigma p\vec{u} \cdot (-\vec{n})\, d\sigma + \int_\sigma \varrho (U + P + K) \vec{u} \cdot (-\vec{n})\, d\sigma$$

Analogne jednačine (10) do (12) za zatvoreni sistem ne sadrže članove koji pretstavljaju transport energije preko granične površine sistema. Ako se takvom sistemu ne dovodi toplota, onda je promena baričke potencijalne energije sistema jednaka jednovremenoj promeni unutrašnje energije tog sistema, (10) i zbir iz ukupne sadržine potencijalne (težinske + baričke) i kinetičke energije sistema je konstantan, (11), što znači da se kinetička energija takvog sistema može da pojavi samo na račun težinske i baričke potencijalne energije sistema.

Na ukupnu sadržinu energije u konstantnoj zapremini V otvorenog sistema utiče transport energije iz okoline u sistem. Pod tim transportom podrazumevamo ustvari razliku iz transporta energije u sistem i iz sistema. Iz jedn. (12) vidimo da iz okoline može da ulazi energija na tri različita načina:

1. dovođenjem i odvođenjem toplote koje se vrši toplotnom provodljivošću i zračenjem (brzinom svetlosti),
2. radom koji vrši okolna sredina zbog dejstva sila pritiska,
3. transportom unutrašnje, težinske potencijalne i kinetičke energije brzinom strujanja vazduha normalno na graničnu površinu.

Vidimo da u otvorenom sistemu može doći do promene kinetičke

energije zbog menjanja težinske i baričke potencijalne energije vazduha u sistemu (kao u zatvorenom sistemu) i zbog raznih transporta energije iz okoline. Od posebnog značaja je transport

$$\emptyset_p \doteq \int_{\sigma} p\vec{u}\cdot(-\vec{n})d\sigma \tag{13}$$

Taj transport je posledica postojanja vektora

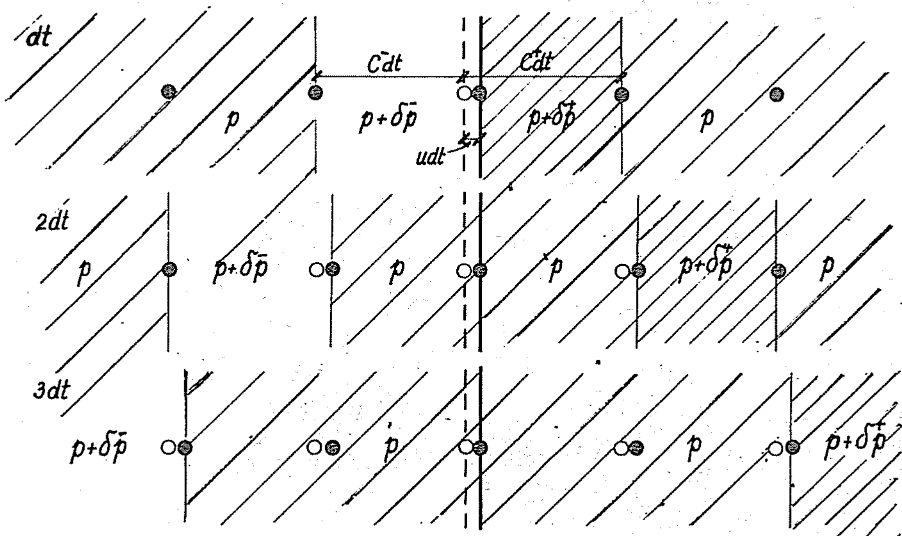
$$\vec{\emptyset}_p = p\vec{u} \tag{14}$$

koji zaslužuje našu posebnu pažnju.

4. Energija kompresionih talasa

U svrhu tumačenja vektora $\vec{\emptyset}_p$ (3 (14)) je potrebno da tumačimo energiju koja se zajedno sa kompresionim talasom brzinom zvuka prostire u atmosferi.

Zamislimo da u mirnoj atmosferi u intervalu vremena dt izvršimo pomak neke ravne pregrade normalno na ravan u kojoj se pregrada nalazi. Ispred pregrade se pojavi zbog tog pomaka neko zgušnjenje, a iza nje neko razređenje materije (sl. 94). Pojavljeni



Sl. 94. Kompresioni talasi kao prenosioci unutrašnje i kinetičke energije u atmosferi

impulsi, tj. zgušnjenje i razređenje, počinju u smislu sl. 94 odmah posle svog obrazovanja (posle intervala vremena dt) da se udaljuju brzinom prostiranja kompresionih talasa C^+ odn. C^- od svog mesta postanka, od pregrade. Ako je brzina u kojom je bilo izvršeno pomeranje pregrade beskonačno mala, onda je (str. 188)

$$(1) \qquad C^+ = C^- = C_L$$

Pri konačnoj brzini u je

$$(2) \qquad C^- < C_L < C^+$$

Razlike između pojedinih vrednosti su to veće, što veće je u.

Zgušnjenje je prouzrokovano adijabatskim sabijanjem, a razređenje adijabatskim razređivanjem vazduha. Zbog toga su pritisak i temperatura u zgušnjenju više ili manje povećani, a u razređenju više ili manje smanjeni. Ovi poremećaji zajedno sa zgušnjenjem i razređenjem udaljuju se od mesta postanka. Ako je u neporemećenoj atmosferi pritisak p, onda je u zgušnjenju i razređenju pritisak

$$(3) \qquad p^+ = p + \delta^+ p \quad \text{odn.} \quad p^- = p + \delta^- p$$

gde je (str. 187 i 188)

$$(4) \qquad \delta^+ p = \varrho C^+ u \quad \text{i} \quad \delta^- p = -\varrho C^- u$$

(ϱ = gustina neporemećenog vazduha).

Za vreme pomeranja pregrade na njenu prednju stranu deluje po jedinici površine sila p^+, a na njenu zadnju stranu deluje na istu površinu sila p^-. Pošto prva sila deluje u suprotnom smislu kretanja pregrade, a druga u smislu njenog kretanja, to u saglasnosti sa prvim principom termodinamike vazduh ispred odn. iza svake jedinice površine u intervalu vremena dt dobija odn. gubi na energiji za p^+u dt odn. p^-u dt. Prema tome nam vektori

$$(5) \qquad \vec{\varnothing}_{dt}^{\,+} = p^+ \vec{u}\,dt\,, \quad \vec{\varnothing}_{dt}^{\,-} = p^- \vec{u}\,dt$$

pretstavljaju transport energije koji se preko jedinice površine pregrade u intervalu vremena dt izvrši u vazduh ispred odn. iz vazduha iza pregrade. Povećanje sadržine energije u prednjem vazduhu može da bude očigledno sadržano samo na onom mestu gde je došlo do poremećenja vazduha, a to je u zgušnjenju. Slično se gubitak energije u vazduhu iza pregrade primećuje samo na mestu gde se nalazi razređenje. Prema tome sa zgušnjenjem i razređenjem prenosi se u atmosferi poremećenje energetskog stanja atmosfere izazvano pomeranjem pregrade i koje po jedinici površine, koja stoji normalno na brzinu prostiranja impulsa, iznosi

$$(6) \qquad \varnothing_{dt}^{\,+} = p^+ u\,dt \quad \text{odn.} \quad -\varnothing_{dt}^{\,-} = -p^- u\,dt$$

Vrednostima (6) definisana je energija impulsa (talasna energija). Ovakva definicija potiče od Čadeža (1945) koji je na osnovu nje tumačio pretvaranje energije u atmosferi (1945, 1949).

Kad uzmemo u obzir jedn. (3) i (4) vidimo da se energija impulsa sastoji iz dva dela, iz"kvazistatičkog"

(7) $\phi_{qdt}^{+} = pudt$ odn. $-\phi_{qdt}^{-} = -pudt$

i "kinematičkog"

(8) $\phi_{kdt}^{+} = \rho C^{+} u^{2} dt$ odn. $-\phi_{kdt}^{-} = \rho C^{-} u^{2} dt$

Prvi je kod zgušnjenja uvek pozitivan, a kod razređenja uvek negativan. Drugi je i u jednom i u drugom slučaju uvek pozitivan i dva puta veći od kinetičke energije koju zgušnjenje i razređenje nosi sobom. Kvazistatički deo je sem pri vrlo velikim brzinama u, koje se napr. javljaju pri raznim eksplozijama, neuporedivo veći od kinematičkog. Tako je napr. pri p = 1000 mb, $u = 10 \text{ m sec}^{-1}$, $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$ i $C = 330 \text{ m sec}^{-2}$ kvazistatički deo od kinematičkog 33 puta veći.

Pomeranje pregrade imalo je za neposrednu posledicu promenu kinetičke energije molekula vazduha. Zbog toga i jedan i drugi vektor (5) pretstavlja transport zbira iz unutrašnje i kinetičke energije. Prvi vektor pretstavlja takav transport energije preko pregrade u prednji vazduh, a drugi vektor pretstavlja transport zbira spomenute dve vrste energije iz pozadi ležećeg vazduha u pregradu. Prvi transport je veći od drugog za, (3), (4),

(9) $\phi_{dt}^{+} - \phi_{dt}^{-} = \rho (C^{+} + C^{-}) u^{2} dt$

tj. za energiju koja je od spolja preko pregrade ušla u vazduh i to u vidu kinematičkog dela talasne energije zgušnjenja i razređenja. Kinetička energija se dakle zajedno sa zgušnjenjem i razređenjem prostire brzinom zvuka kroz vazduh.

Zajedno sa zgušnjenjem prostire se kroz atmosferu pored kinematičkog dela još kvazistatički deo talasne energije, koji je pri malim brzinama u mnogo veći od kinematičkog. Pošto je sva kinetička energija zgušnjenja sadržana u kinematičkom delu, to kvazistatički deo talasne energije pretstavlja unutrašnju energiju koja se zajedno sa zgušnjenjem prostire kroz atmosferu. Ali, ta energija nije od spolja ušla u posmatrani vazduh, već je ušla iz vazduha koji se nalazi pozadi pregrade i koji na mestu gde se nalazi razređenje sadrži baš toliki manjak unutrašnje energije (kvazistatički deo razređenja, (7)). Talasna energija razređenja sastoji se dakle iz jednog pozitivnog i jednog negativnog dela. Pri malim brzinama u negativni deo je po apsolutnoj vrednosti mnogo veći od pozitivnog. Za razliku od kinematičkog dela koji pretstavlja prenos kinetičke energije u pravcu i smislu prostiranja zgušnjenja i razređenja, pretstavlja kvazistatički deo prenos unutrašnje energije koji se vrši u pravcu i smislu prostiranja impulsa samo kod zgušnjenja, pošto se kod razređenja vrši u suprotnom smislu.

Slično kao u navedenom primeru sa svakim kompresionim talasom u atmosferi se prenosi unutrašnja i kinetička energija sa jednog mesta na drugo. Ako zamislimo atmosferu koju smo opisali u odeljku XI-6 vidimo da se kroz makoju površinu u takvoj atmosferi

zajedno sa kompresionim talasima (zgušnjenjima i razređenjima) vrši na jednu i drugu stranu brzinom zvuka prenos unutrašnje i kinetičke energije. Ukupni transport te dve vrste energije kroz jedinicu površine koja stoji normalno na strujnice dobijamo množenjem jedn. XI (16) pritiskom p. Prema tome je taj transport

$$(10) \qquad \vec{\emptyset}_p = p\vec{u} = \frac{p}{\Delta t} \sum_{i=1}^{k} \vec{u}_i \, dt$$

i kaže nam da u jedinici vremena impulsi brzinom zvuka prenose kroz posmatranu jedinicu površine na prednju stranu (za posmatrača kome vetar duva u leđa) za pu više unutrašnje i kinetičke energije nego na suprotnu stranu.

Na osnovu svega izloženog vidimo da drugi integral na desnoj strani jedn. 3 (12) možemo bar u izvesnim slučajevima tumačiti kao transport unutrašnje i kinetičke energije, tj. zbira ove dve vrste energije u sistem. Taj transport pretstavlja razliku između transporta na unutrašnju i spoljašnju stranu, a koji se vrši u svim mogućim pravcima brzinom zvuka.

5. Razmena toplotne energije između zemljinog tla i prizemnog sloja vazduha

Glavni izvor energije atmosfere toplotne je Sunce. Ovu energiju atmosfera prima ili direktno i to apsorpcijom sunčevog zračenja ili indirektno preko zagrevanja zemljinog tla. S druge strane atmosfera i neprestano daje toplotnu energiju, delom u vidu zračenja direktno u vasionu, a delom i zemljinoj podlozi (sl. 35, str. 130). Za razumevanje raznih atmosferskih pojava od posebnog je značaja poznavanje razmene toplotne energije između zemljinog tla i prizemnog sloja vazduha pod raznim uslovima.

Posmatrajmo prvo razmenu toplotne energije između površinskog sloja zemljišta debljine dz i okoline.

Kroz jedinicu gornje granične površine površinskog sloja postoje sledeće struje energije (u jedinici vremena) naviše:

energija toplotnog zračenja $Q_r - Q_i - Q_k$ (Q_r = radijacija, Q_i = insolacija - samo u toku dana, Q_k = kontrazračenje),

energija zbog turbulencije i toplotne provodljivosti vazduha Q_t,

toplota isparavanja vode Q_L koja zajedno sa vodenom parom izlazi iz zemljine podloge ($Q_L > 0$) odn. ulazi u nju ($Q_L < 0$),

toplotna energija (unutrašnja energija) vode - Q_a koja prilikom padavina ulazi u zemljište ($Q_a > 0$).

Neznatnu struju unutrašnje energije vodene pare $c_{vv}T$ nismo uzeli u obzir.

Slično kroz jedinicu donje granične površine površinskog sloja postoje jednovremeno sledeće struje energije naviše

energija zbog toplotne provodljivosti zemljišta Q_{pz},
toplota isparavanja vode Q_{Lz},
toplotna energija vode - Q_{az}.

Pojedine od navedenih vrednosti ne postoje uvek, Q_a postoji npr. samo za vreme padavina.

Vidimo da posmatrani deo površinskog sloja debljine dz u intervalu vremena dt primi toplotnu energiju

(1) $$Q\,dt = (Q_{pz} + Q_{Lz} - Q_{az} - Q_r + Q_i + Q_k - Q_t - Q_L + Q_a)\,dt$$

U saglasnosti sa prvim principom termodinamike dovedena toplota $Q\,dt$ jednaka je jednovremenoj promeni unutrašnje energije posmatranog površinskog sloja debljine dz, a ta je očigledno

(2) $$dU_{z,\varrho_z dz} = (\varrho_z dz)\,dU_z$$

(ϱ_z, U_z = gustina odn. unutrašnja energija jedinice mase zemljišta). Debljina dz sloja i promena unutrašnje energije dU_z su infinitezimalno male veličine. Zbog toga je promena unutrašnje energije (2) u poređenju sa veličinama iz jedn. (1) mala veličina drugog reda, tako da mesto jedn. (1) možemo pisati

(3) $$Q_{pz} + Q_{Lz} - Q_{az} - Q_r + Q_i + Q_k - Q_t - Q_L + Q_a = 0$$

Time smo dobili jedn. toplotnog bilansa za zemljinu površinu.

U saglasnosti sa ranijim izlaganjima možemo pisati

(4) $$Q_{pz} = -\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_o$$

(λ_z= koeficijent toplotne provodljivosti zemljišta, $\frac{\partial T}{\partial z}\big|_o$ = temperaturni ascendent u zemljištu neposreno ispod površine, vertikalna z-osa usmerena naviše). Dalje je (str. 123, 124)

(5) $$Q_r - Q_k = R_r\left(\frac{T_o}{T_s}\right)^4 \doteq R_r\left(1 + 4\frac{T_o - T_s}{T_s}\right)$$

gde je

(6) $$R_r = a\,T_s^4(1 - k\,m)(0{,}194 + 0{,}236\cdot 10^{-0{,}069\,e})$$

Transport toplote zbog insolacije možemo sebi u saglasnosti sa M. Milankovićem pretstaviti funkcijom

(7) $$Q_i = b_1 - b_2 \cos \nu_1 t_1$$

(b_1, b_2, ν_1 = konstante veće od nule, t_1 = lokalno vreme). Zbog turbulencije postoji transport

(8) $$Q_t = -K\,c_p\left(\gamma_a + \frac{\partial T'}{\partial z}\bigg|_o\right)$$

($\frac{\partial T'}{\partial z}\big|_o$ = temperaturni ascendent u vazduhu neposredno iznad zemljinog tla). U potpuno mirnoj noći možemo mesto jedn. (8) pisati

(8^a) $$Q_t = -\lambda\frac{\partial T'}{\partial z}\bigg|_o$$

(λ= koeficijent toplotne provodljivosti vazduha). Ostale vrednosti koje se još u jedn. (3) pojavljaju treba posebno proučiti.

Primena jednačine toplotnog bilansa za zemljinu površinu (3) je svestrana. Pomoću nje izračunava se dnevni minimum i maksimum temperature, tumači se zakašnjenje dnevnog temperaturnog maksimuma, procenjuje se transport toplote iz zemljišta u atmosferu itd. O tim pojavama biće reči u drugom delu udžbenika.

6. Unutrašnja i težinska potencijalna energija atmosfere

Videli smo (3 (11)) da u atmosferi u kojoj možemo sile trenja zanemariti kinetička energija vazduha potiče od unutrašnje i potencijalne energije. Danas još nije rešeno pitanje koja od ove dve vrste energije je od većeg značaja za pojavu raznih vetrova u atmosferi, prvenstveno u ciklonima. Prilikom rešavanja tog problema je od značaja da znamo koje energije, unutrašnje ili potencijalne, sadrži atmosfera više.

Vertikalni stub vazduha u atmosferi u kojoj se pritisak menja sa visinom u saglasnosti sa osnovnom jednačinom statike sadrži

$$(1) \qquad U = \int_0^z \varrho c_v T \, dz \qquad \text{i} \qquad P = \int_0^z \varrho g z \, dz$$

unutrašnje odnosno težinske potencijalne energije (z = visina stuba sa presekom 1). Pri tome toplote isparavanja nismo uzeli u obzir. Pošto je

$$(2) \qquad dp = -g\varrho dz \qquad \text{i} \qquad z\,dp = d(zp) - p\,dz$$

to je za $z = z_v$ (= visina vrha atmosfere gde je $p = 0$)

$$(3) \qquad P = \int_0^{z_v} p\,dz = \int_0^{z_v} R\varrho T\,dz$$

U tom slučaju ($z = z_v$) je

$$(4) \qquad U = \frac{1}{\varkappa}(U + P), \quad P = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}(U + P), \quad \frac{U}{P} = \frac{1}{\varkappa - 1}$$

gde je, kao što smo videli, $\frac{1}{\varkappa} = 0,71$, $\frac{\varkappa-1}{\varkappa} = 0,29$, $\frac{1}{\varkappa-1} = 2,5$ (str. 51). Atmosfera sadrži dakle 2,5 puta više unutrašnje nego težinske potencijalne energije, ukupna sadržina jedne od ove dve energije srazmerna je ukupnoj sadržini druge.

Vidimo da je u atmosferi pretvaranje unutrašnje energije u najtešnjoj vezi sa jednovremenim pretvaranjem težinske potencijalne energije. Ako se iz makog uzroka, napr. zbog zagrevanja, unutrašnja energija povećava, jednovremeno povećava se i težinska potencijalna, ako se pak smanjuje, smanjuje se i težinska potencijalna. Svakako sve to važi pod uslovom da je uvek i svuda ispunjena ili bar približno ispunjena osnovna jednačina statike. Kako u tom pogledu pod raznim uslovima stoje stvari danas još nije dovoljno poznato. U svakom slučaju u atmosferi postoji tendencija da se uspostavi stanje koje je određeno jedn. (4). Kako se to stanje uspostavlja navešćemo u jednom primeru:

Zamislimo da u mirnoj izotermnoj atmosferi vazduh mase m koji

vodenom parom nije zasićen primi dQ toplote i da se posle toga suvoadijabatski popne na onu visinu gde će imati jednaku temperaturu kao okolni vazduh. Zbog dovedene toplote i širenja na veću zapreminu, za vreme penjanja iz posmatranog delića izlazi izvesna količina unutrašnje energije u okolni vazduh, a zbog dejstva gradijentne sile atmosfera prilikom penjanja dodeli izvesnu količinu energije posmatranom deliću (2 (3)).

Zbog dovođenja toplote dQ i izvršenog rada, posle dovođenja toplote prilikom širenja na veću zapreminu za vreme penjanja, posmatrani delić predaje u okolnu atmosferu ukupno

(5) $$dU_{o1} = p\,dV = dQ - dU_m$$

energije. To je energija koja u vidu talasne energije (unutrašnje i delom kinetičke) brzinom zvuka odlazi iz delića u okolnu atmosferu. Pošto se delić popeo do one visine na kojoj je imao jednaku temperaturu kao okolna atmosfera, tj. jednaku temperaturu kao na početku, to se ukupno unutrašnja energija tog delića nije ništa promenila (III-7 (9)). Zbog toga je

(6) $$dU_m = 0 \quad \text{i} \quad dU_{o1} = dQ$$

Vazdušni delić je dakle u vidu talasne energije posle dovedene toplote i smirenja predao okolnoj atmosferi tačno toliko energije koliko je toplotne energije apsorbovao.

Na drugoj strani atmosfera zbog dejstva gradijentne sile dodeli posmatranom deliću jednovremeno

(7) $$- dU_{o2} = - V\,dp = dQ - m\,c_p dT = dQ$$

energije, tj. baš toliko koliko je energije u vidu talasne energije primila.

Na osnovu izloženog vidimo sledeće:

1. unutrašnja energija posmatranog delića posle smirenja jednaka je kao što je bila na početku, još pre primanja toplote,

2. posle dovođenja toplote i smirivanja delića ukupna sadržina energije okolne atmosfere se zbog ove pojave nije ništa promenila i

3. posle smirenja ukupno povećanje energije do kojeg je došlo zbog dovođenja toplote manifestuje se samo u povećanju ($d\,P_m$) težinske potencijalne energije delića.

Pojavljeni poremećaj prostire se kroz atmosferu brzinom zvuka i pri tome izaziva na putu prostiranja odgovarajuće poremećaje. Tek posle smirenja čitave atmosfere treba da bude u saglasnosti sa jedn. (4) promena ukupne sadržine unutrašnje i težinske potencijalne energije

(8) $$dU = \frac{1}{\kappa}\,dQ \quad \text{i} \quad dP = \frac{\kappa - 1}{\kappa}\,dQ$$

Do povećanja težinske potencijalne energije atmosfere došlo je ustvari zbog povećanja zapremine delića koji je apsorbovao

toplotu. Time se je naime posle smirenja povećala zapremina čitave atmosfere. U saglasnosti sa jedn. 2 (6) je zbog povećanja dV zapremine V posmatranog delića mase m prilikom apsorpcije toplote, dok je njegova visina ostala još nepromenjena, iz delića ušlo u okolnu atmosferu

(9) $$p\,dV = \frac{\kappa - 1}{\kappa}\,dQ$$

energije. Vidimo da je povećanje težinske potencijalne energije čitave atmosfere posle smirenja jednako talasnoj energiji koju okolnoj atmosferi dodeli posmatrani delić zbog povećanja zapremine, i to onog povećanja koje je neposredna posledica dovođenja toplote.

U navedenom primeru smo videli da se toplotna energija neposredno pretvara u unutrašnju energiju i da se tek posle izvesnog vremena u vezi sa određenim pretvaranjem energije u atmosferi povećanje energije atmosfere manifestuje u povećanju unutrašnje i težinske potencijalne energije. Ovo povećanje je posle smirivanja određeno vrednostima (8).

7. Pretvaranje energije u atmosferi zbog spoljašnjeg trenja i turbulencije

Sile trenja od posebnog su značaja za atmosfersku dinamiku i one su u vezi sa određenim pretvaranjem energije u atmosferi. Ta pretvaranja nas ovde zanimaju.

Zamislimo u smislu slike 44 na str. 156 hladan ciklon, tj. kalotu hladnog vazduha u kojoj vazduh cirkuliše u ciklonalnom pravcu. Zbog dejstva sila trenja o zemljino tle prizemni vazduh dobija impulse u pravcu a u spuprotnom smislu kretanja. Zbog turbulencije ti impulsi prenose se u više slojeve hladnog vazduha, i ukoliko se polje pritiska u gornjem potencijalno toplijem vazduhu u toku vremena ne menja, što ovde i pretpostavljamo, kinetička energija hladne vazdušne mase se smanjuje. Uporedo sa smanjivanjem kinetičke energije smanjuje se i horizontalni gradijent pritiska u kaloti hladnog vazduha, što u saglasnosti sa jednačinom za nagib granične površine znači povećavanje nagiba granične površine. Time se povećava visina kalote, a s njom težinska potencijalna energija hladnog vazduha.

U navedenom primeru sile trenja i turbulencija posreduju pretvaranje kinetičke energije u težinsku potencijalnu energiju. Na ovu pojavu možda je prvi upozorio Čadež (1955) prilikom tumačenja stvaranja hladnih anticiklona.

Pretvaranje kinetičke energije u težinsku potencijalnu energiju posredstvom trenja vrlo je karakteristična pojava i na prvi pogled izgleda paradoksalna. Prilikom smanjivanja brzine čvrstog tela se naime zbog trenja kinetička energija pretvara u toplotnu, tj. u unutrašnju energiju tela i podloge. Zbog toga dolazi do zagrevanja i tela i podloge. U atmosferi je drukčije:

Vazduh koji se, zbog raznih predmeta na koje naiđe, zaustavlja gubi u opštem slučaju na kinetičkoj energiji iz dva uzroka, prvo zbog toga što deo svoje kinetičke energije predaje predmetima na zemlji (pokreće grane drveća, diže predmete sa zemljine po-

vršine itd) i drugo zbog toga što se prilikom zaustavljanja komprimuje. Prilikom komprimovanja kinetička energija pretvara se u unutrašnju (baričku potencijalnu) energiju tog istog vazduha koji se pri tome zagreva. Zbog zaustavljanja skreće vazduh od svog pravca kretanja ulevo (na severnoj hemisferi). Sa smanjivanjem brzine smanjuje se, naime, dejstvo sile devijacije, a eventualno i centrifugalne sile i time gradijentna sila nadvlada ove dve sile. Skretanje ulevo znači u gornjem primeru popunjavanje depresije i opšte uzdizanje hladnog vazduha, tj. pretvaranje kinetičke energije preko unutrašnje (baričke potencijalne) u težinsku potencijalnu energiju.

Koliko kinetičke energije može u atmosferi zbog trenja da iščezne pokazao je već 1926 godine engleski meteorolog-teoretičar D. Brunt.

Izračunajmo koliko je iščezavanje kinetičke energije u sloju trenja iznad ravne podloge gde su strujanja neubrzana i gde se vetar menja sa visinom u saglasnosti sa Ekman-ovom spiralom (str. 169, 170). U tom slučaju hidrodinamičke jednačine kretanja glase

$$(1)\qquad \begin{aligned} -\alpha\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + fv &= 0 \\ -\alpha\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - fu &= 0 \end{aligned}$$

Množenjem jedne i druge jednačine elementom mase vazduha $dm = \rho\, dx\, dy\, dz$, a zatim prve sa u i druge sa v dobijamo za energiju koja se troši u jedinici vremena za savlađivanje sile efektivnog trenja koja deluje na taj element mase

$$(2)\qquad -\frac{dK_{dm}}{dt} = -\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}u + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}v\right) dx\, dy\, dz = -\frac{\partial p}{\partial s}|\vec{u}|\, dx\, dy\, dz$$

($-\frac{\partial p}{\partial s}$ = komponenta gradijenta pritiska u pravcu strujanja). Ova vrednost je pozitivna u zoni trenja i u saglasnosti sa jedn. 2 (3) pretstavlja smanjenje energije okolne atmosfere koje se u zoni trenja u jedinici vremena pojavi i to zbog delovanja sila efektivnog unutrašnjeg trenja na posmatrani delić vazduha mase dm. Pošto je to smanjenje posledica dejstva sila trenja, to ono pretstavlja smanjenje kinetičke energije.

Jednačine (1) smo integralili pod uslovom da je gradijent pritiska svuda u polju jednak (IX-4). To pretpostavljamo i u ovom slučaju. Ako x-osu usmerimo u pravcu izobara, onda je, (1),

$$(3)\qquad \frac{\partial p}{\partial s}|\vec{u}| = -f\rho u_g v$$

gde je

$$(4)\qquad u_g = -\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

brzina gornjeg geostrofskog vetra. U saglasnosti sa jedn. (2) i (3) dobijamo sada da u svakoj jedinici vremena iznad svake jedinice površine ($dx\, dy = 1$) zbog turbulencije u zoni trenja iščezne

(5) $$-\frac{dK_m}{dt} = \int_0^{z_t} f\varrho u_g\, v\, dz$$

kinetičke energije. Kako se u ovakvoj atmosferi menja vetar sa visinom videli smo ranije (IX-4). Ako zadatak pojednostavimo time da uzmemo slučaj $\gamma_0 = 0$, onda možemo prema jedn. IX-4: (10), (11) i (13) pisati

(6) $$v = u_g e^{-\frac{\pi z}{z_t}} \sin\frac{\pi z}{z_t}$$

Unošenjem ove vrednosti u (5) dobijamo za iščezavanje kinetičke energije u zoni trenja iznad svake jedinice površine u jedinici vremena

(7) $$-\frac{dK_m}{dt} = \frac{f\bar{\varrho}u_g^2 z_t}{2\pi}(1 + e^{-\pi})$$

Ako je napr. $\varphi = 45^o$ ($f = 10^{-4}$ sec^{-1}), $\bar{\varrho} = 1,2$ kg m^{-3}, $u_g = 10 m sec^{-1}$, $z_t = 1000$ m, onda je

$$-\frac{dK_m}{dt} = \frac{10^{-4}\cdot 1,2\cdot 10^2\cdot 1000}{2\cdot 3,14}\ kgm^2sec^{-2}/m^2sec = 2 džaula/m^2sec.$$

Iz primera vidimo da je turbulentna disipacija (iščezavanje) kinetičke energije u atmosferi velika. Primer se odnosi na ravno tle i pretstavlja približno srednju vrednost. Iznad mora vrednosti su mnogo manje, a mnogo veće su iznad brda i planina. Te vrste iščezavanje kinetičke energije stalno postoji i u višim slojevima atmosfere i to svakako samo u pojedinim slojevima, pošto u slobodnoj atmosferi nije svuda $-\frac{\partial p}{\partial s} > 0$. Tako u slobodnoj atmosferi turbulencija prouzrokuje u pojedinim slojevima povećavanje kinetičke energije u toku vremena. Ta pojava danas još nije dovoljno proučena.

8. Pretvaranje energije prilikom stacionarnog cirkulisanja vazduha

Za održavanje stacionarnih strujanja vazduha u atmosferi potrebno je da se stalno dovodi energija. Jedan deo kinetičke energije se naime stalno zbog spoljašnjeg trenja, a delom i zbog turbulentne disipacije gubi. Dovedena energija može da bude samo toplotna energija, a pitanje je na koji način se dovodi energija za održavanje stacionarnog strujanja (cirkulisanja) vazduha u atmosferi.

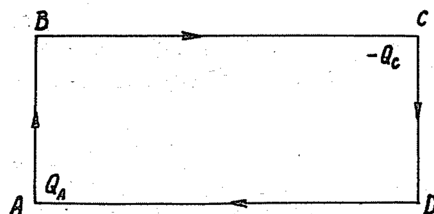
U atmosferi postoje razna više ili manje stalna stacionarna cirkulisanja vazduha. Tako je napr. poznat pasatski krug cirkulacije, vrlo su postojane monsunske cirkulacije uslovljene razlikom u temperaturi između kontinenta i mora itd. Već M. Margules je izračunao (1901) koje dovođenje toplote je potrebno da se pri takvim cirkulacijama stalno održavaju određene razlike u pritiscima. Kasnije (1916) je J.W. Sandström ovom problemu posvetio posebnu pažnju sa teorijske i eksperimentalne strane.

Zamislimo, prema Margules-u, da delić u vertikalnoj ravni pređe put po ivicama pravougla ABCDA (sl. 95). Na tom putu okolna

atmosfera zbog dejstva gradijentne sile na delić izvrši rad (2 (4))

$$(1)\qquad W_{g,m} = -\oint V\frac{\partial p}{\partial s}\,ds$$

Integral se odnosi na čitav zatvoreni put. Ovakva cirkulacija vazduha je u atmosferi moguća pod raznim uslovima. Margules i Sandström proučavali su sledeći jednostavni slučaj:



Sl. 95. Održavanje stacionarnog strujanja dovođenjem i odvođenjem toplote

U tački A (napr. na ekvatoru pri zemljinom tlu) neka vazduh pri konstantnom pritisku p_A primi Q_A toplote. Pri tome postaje topliji od okolnog vazduha i popne se u više slojeve atmosfere suvoadijabatski do tačke B. Tamo menja pravac kretanja i posle izvesnog vremena dolazi u tačku C, koja se nalazi na istoj ili približno istoj visini kao tačka B. U tački C dođe pri konstantnom pritisku p_C do odvođenja toplote Q_C ($Q_C > 0$). Delić postaje hladniji od okoline i spusti se u tačku D (napr. oblast suptropskog anticiklona) gde opet menja pravac kretanja i posle izvesnog vremena vrati se u početnu tačku A sa jednakom temperaturom kao na početku. Sem za vreme dovođenja i odvođenja toplote (u tačkama A i C) kretanje neka se vrši suvoadijabatski i to u stacionarnom polju pritiska.

Integral (1) možemo pod navedenim uslovima lako izračunati:

Ako podelimo ceo kružni put na dva dela, na deo s_1 koji ide od tačke A preko B do tačke C i na preostali deo s_2 (od C preko D do A), onda je prema prvom principu termodinamike

$$(2)\qquad -\int_0^{s_1} V\frac{\partial p}{\partial s}\,ds = -\int_{p_A}^{p_C} V\,dp = -\int_{T_{A2}}^{T_{C1}} mc_p\,dT = mc_p(T_{A2} - T_{C1})$$

i slično

$$(3)\qquad -\int_0^{s_2} V\frac{\partial p}{\partial s}\,ds = mc_p(T_{C2} - T_{A1})$$

(T_{A1}, T_{A2} i T_{C1}, T_{C2} = temperature u tački A odn. C. Prve vrednosti se odnose na vreme pre, a druge na vreme posle dovođenja odn. odvođenja toplote). Kad ovo uzmemo u obzir u jedn. (1), dobijamo

$$(4)\qquad W_{g,m} = mc_p\left[(T_{A2} - T_{A1}) - (T_{C1} - T_{C2})\right]$$

Dovođenje i odvođenje toplote izvrši se pri konstantnom pritisku. Zbog toga je

$$(5)\qquad Q_A = mc_p(T_{A2} - T_{A1}) \quad \text{i} \quad Q_C = mc_p(T_{C1} - T_{C2})$$

i

$$W_{g,m} = \frac{Q_A - Q_C}{Q_A} Q_A \quad (6)$$

Dalje je očigledno u saglasnosti sa definicijom potencijalne temperature

$$T_{A2} = \Theta_1 \left(\frac{p_A}{1000}\right)^{\frac{R}{c_p}}, \quad T_{C1} = \Theta_1 \left(\frac{p_C}{1000}\right)^{\frac{R}{c_p}}, \quad T_{C2} = \Theta_2 \left(\frac{p_C}{1000}\right)^{\frac{R}{c_p}}, \quad T_{A1} = \Theta_2 \left(\frac{p_A}{1000}\right)^{\frac{R}{c_p}} \quad (7)$$

(Θ_1, Θ_2 = potencijalna temperatura delića na putu s_1 odn. s_2). Ako uzmemo ovo u jedn. (4) i (5) u obzir, vidimo da možemo pisati

$$W_{g,m} = \left[1 - \left(\frac{p_C}{p_A}\right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}\right] Q_A \quad (8)$$

Rad koji okolna atmosfera zbog dejstva gradijentne sile vrši na posmatrani delić vazduha izrazili smo na tri načina, pomoću temperatura, dovedene i odvedene toplote i pomoću pritiska na mestu dovođenja i odvođenja toplote. U slučaju stacionarnog strujanja ovaj rad može da se troši samo za savlađivanje sila trenja. To je razumljivo kad uzmemo u obzir da sila devijacije deluje stalno normalno na vektor brzine i da se na kružnom putu ABCDA težinska potencijalna energija u celini ništa ne menja.

Iz jedn. (8) proizlazi da je za održavanje stacionarnog strujanja u atmosferi potrebno da se atmosferi na raznim mestima dovodi i odvodi toplota i da izvor hladnoće leži pod manjim pritiskom nego izvor toplote. Ovo je poznati Sandströmov stav i proizlazi iz činjenice da na zagrejani vazduh prilikom kretanja od visokog ka niskom pritisku deluje veća gradijentna sila nego prilikom povratnog kretanja kada je vazduh rashlađen i ima manju zapreminu.

Vidimo da se atmosfera u oblasti stacionarnih zatvorenih strujanja ponaša kao mašina sa termodinamičkim korisnim dejstvom

$$\eta = \frac{Q_A - Q_C}{Q_A} \quad (9)$$

koje je u saglasnosti sa jedn. (8) to veće što manji je pritisak na mestu odvođenja toplote.

Na kružnom putu ABCDA zbog delovanja gradijentne sile posmatrani delić je primio $Q_A - Q_C$ energije, tj. tačno toliko koliko iznosi razlika između dovedene i odvedene toplote. Sada stojimo pred pitanjem koliko energije je na tom istom putu delić predao okolini zbog menjanja njegove zapremine pod dejstvom sila pritiska. Pitamo se dakle koliko je (2 (5))

$$- W_{p,m} = \oint p \frac{dV}{ds} ds \quad (10)$$

Ovu energiju možemo tumačiti kao zbir iz predate energije prilikom dovođenja toplote u tački A, prilikom suvoadijabatskog kretanja od A preko B do C, za vreme odvođenja toplote u tački C i konačno prilikom suvoadijabatskog kretanja na preostalom delu puta (od C preko D do A). Kad ovo uzmemo u obzir, odmah vidimo da možemo u

saglasnosti sa prvim principom termodinamike pisati

$$(11) \quad -W_{p,m} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} Q_A - m c_v (T_{C1} - T_{A2}) - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} Q_C - m c_v (T_{A1} - T_{C2})$$

Odavde i iz jedn. (5) i (4) dobijamo

$$(12) \quad -W_{p,m} = W_{g,m}$$

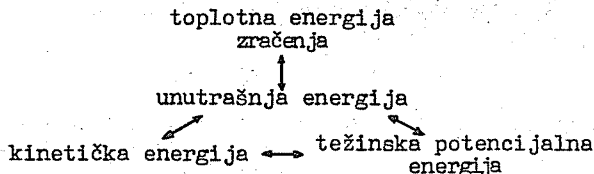
Zbog menjanja zapremine na zatvorenom putu delić dakle predaje okolnoj atmosferi (u vidu talasne energije) tačno toliko energije koliko je jednovremeno zbog dejstva sila pritiska primi, tj. toliko koliko iznosi razlika između dovedene i odvedene toplote, (6).

Posmatrani delić vazduha na svom kružnom putu u celini je primio $Q_A - Q_C$ toplotne energije. Na osnovu izloženog vidimo da se ta energija, pošto pretpostavljamo stacionarnost strujanja, može upotrebiti samo za savlađivanje sila trenja, spoljašnjih i unutrašnjih, što znači da deo primljene toplotne energije ulazi u podlogu a deo se zadrži u atmosferi. Ukoliko u posmatranom slučaju na delić sile trenja ne bi delovale, zbog primljene energije $W_{g,m}$ deliću bi se u tom iznosu povećala kinetička energija.

9. Pretvaranje energije u atmosferi

Problem pretvaranja energije u atmosferi vrlo je složen. Ovde nas zanima samo pitanje koje mogućnosti postoje u pogledu pretvaranja jedne vrste energije u drugu.

Atmosfera prima energiju prvenstveno od Sunca. Energija sunčevog zračenja pretvara se neposredno samo u untrašnju energiju vazduha. Ova može neposredno da se pretvara i u težinsku potencijalnu i u kinetičku energiju. Unutrašnja energija pretvara se npr. u potencijalnu prilikom zagrevanja vazduha. Pri tome se zapremina vazduha povećava i ukoliko je dole vazduh ograničen od čvrste zemljine podloge, vazduh dobija na težinskoj potencijalnoj energiji. Unutrašnja energija može da se pretvara još u toplotnu energiju zračenja prilikom izračivanja. Kinetička energija može se pretvarati u unutrašnju i težinsku potencijalnu i slično može se težinska potencijalna energija pretvarati u unutrašnju i kinetičku energiju vazduha. Vidimo da možemo pretvaranje energije u atmosferi sebi predočiti sledećom šemom:



XIV. CIRKULACIJA I VRTLOŽNOST

1. Pojam cirkulacije i ubrzanja cirkulacije

U atmosferi postoje raznovrsna strujanja vazduha u vidu zatvorenih linija, gde vazduh cirkuliše skoro izolovano od okolne atmosfere. Tako je napr. poznat već spomenuti pasatski krug cirkulacije. Redovna pojava je cirkulisanje vazduha u ciklonima i anticiklonima, pa i na malim oblastima, pred našim očima, možemo da posmatramo kako vazduh cirkuliše. To su pijavice i tornedi, cirkulacije zbog razlika u temperaturi između kopna i mora itd. Pojam cirkulacije zaslužuje dakle našu posebnu pažnju, tako da stojimo pred zadatkom da detaljnije opišemo takva strujanja. Tom meteorološkom problemu posvetio je naročitu pažnju V. Bjerknes, koji je proširio stavove o cirkulaciji H. Helmholtz-a na realne gasove pod opštijim uslovima i na vazduh u atmosferi.

Zamislimo u makojoj tečnosti (gasu) neku zatvorenu liniju koja se zajedno sa delićima tečnosti kreće. Ako je $\vec{u}$ vektor brzine vazduha a $\delta\vec{r}$ element takve materijalne linije, onda se integral

(1) $$C = \oint \vec{u} \cdot \delta\vec{r} \qquad [C] = [m^2 sec^{-1}]$$

duž cele takve linije zove cirkulacija duž linije. Totalni izvod cirkulacije po vremenu

(2) $$\frac{dC}{dt} = \frac{d}{dt}\oint \vec{u} \cdot \delta\vec{r} = \oint \frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \delta\vec{r}) \quad \left[\frac{dC}{dt}\right] = [m^2 sec^{-2}]$$

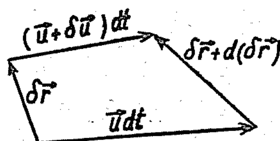
zove se ubrzanje cirkulacije. Ukoliko zamišljena linija ne bi bila zatvorena i išla bi prema tome od jednog delića i završavala bi se pri nekom drugom, onda nam bi integrali analogni integralima (1) i (2) značili precesiju odn. ubrzanje precesije duž linije.

Prilikom kretanja može se dužina i pravac elementa puta $\delta\vec{r}$ menjati. Ako taj vektor u elementu vremena dt pretrpi promenu $d(\delta\vec{r})$, onda možemo u saglasnosti sa slikom 96 pisati

(3) $$-\delta\vec{r} + \vec{u}\,dt + \delta\vec{r} + d(\delta\vec{r}) - (\vec{u} + \delta\vec{u})\,dt = 0$$

($\delta\vec{u}$ = geometrijska promena vektora brzine na putu $\delta\vec{r}$). Odavde vidimo da važi sledeći identitet

(4) $$\frac{d(\delta\vec{r})}{dt} = \delta\vec{u}$$



Sl. 96

a zbog toga i sledeći

(5) $$\frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \delta\vec{r}) = \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \delta\vec{r} + \vec{u} \cdot \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}) = \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \delta\vec{r} + \delta\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

Ako sada ovo uzmemo u definiciji (2) u obzir, kao i to da integral potpunog diferencijala $\delta(\frac{u^2}{2})$ duž zatvorene linije iščezava, dobijamo

(6) $$\frac{dC}{dt} = \oint \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\delta\vec{r}$$

Time smo dobili Kelvinov stav (1869) koji kaže da je ubrzanje cirkulacije jednako linijskom integralu duž zatvorene materijalne linije preko komponente ubrzanja delića tečnosti (gasa) u pravcu te linije.

Integrali u jedn. (1) i (6) odnose se na zatvorenu liniju. Integraljenje se vrši duž puta idući u pozitivnom ili negativnom smislu. Zbog toga treba pri određivanju brojne vrednosti cirkulacije i ubrzanja cirkulacije navesti i smisao na koji se vrednost odnosi.

2. Apsolutna cirkulacija

Ubrzanje cirkulacije određuje se tangencijalnim ubrzanjem tečnosti duž zatvorene materijalne linije. Pošto je ubrzanje uvek vezano za jednačinu kretanja tečnosti, to možemo ubrzanje cirkulacije 1 (6) da pišemo i na drugi način.

Ovde nas zanima koliko je odn. od čega zavisi ubrzanje cirkulacije u apsolutnom sistemu, tj. u sistemu S' koji sa Zemljom ne rotira. Pod ovim uslovima, ako sile trenja zanemarimo, jednačina kretanja vazduha glasi

$$\frac{d\vec{u}'}{dt} = -\alpha\nabla p - \nabla\phi'$$

(ϕ' = potencijal polja gravitacije). Množenjem ove jednačine skalarno elementom puta $\delta\vec{r}$ duž zatvorene materijalne linije duž koje tražimo ubrzanje cirkulacije, dobijamo

$$\frac{d\vec{u}'}{dt}\cdot\delta\vec{r} = -\alpha\delta p - \delta\phi'$$

gde su δp i $\delta\phi'$ razlike u pritisku p odn. geopotencijalu ϕ' između krajnje i početne tačke elementa puta $\delta\vec{r}$ u datom trenutku vremena. Pošto je $\delta\phi'$ potpuni diferencijal, to za ubrzanje cirkulacije (apsolutne cirkulacije) pod gornjim uslovima dobijamo

(1) $$\frac{dC'}{dt} = -\oint \alpha\,\delta p$$

Pošto je $\alpha\delta p = \delta(\alpha p) - p\delta\alpha$, to mesto jedn. (1) možemo da pišemo i

(2) $$\frac{dC'}{dt} = \oint p\,\delta\alpha$$

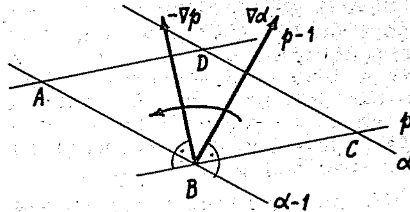
Iz jednačina (1) i (2) vidimo među ostalim sledeće:

1. Cirkulacija se u otsustvu sila trenja u toku vremena ne menja ($\frac{dC'}{dt} = 0$) ako je specifična zapremina (gustina) vazduha duž linije konstantna ili je pak samo funkcija vazdušnog pritiska (tada je $\alpha\delta p$ potpuni diferencijal). To je Helmholtzov stav o održavanju vrtloga. Pošto može duž puta gustina da bude funkcija jedino pritiska samo u autobarotropnoj tečnosti ($\Gamma = \gamma$), to Helmholtz-

ov stav važi samo za vrtloge koji postoje u ovakvoj tečnosti. U koliko u autobarotropnoj tečnosti vrtloga nema, oni se i u toku vremena ne mogu pojaviti.

2. U otsustvu sila trenja u apsolutnom sistemu, cirkulacija se menja samo tada kada duž linije cirkulacije gustina vazduha ne zavisi samo od pritiska.

U svrhu daljeg tumačenja jednačine (1) zamislimo da materijalna linija duž koje tražimo ubrzanje cirkulacije zaklapa tačno jedan izobar-izosterski solenoid (sl. 97). Pravac integraljenja izabraćemo u smislu slike 97 tako da je na putu $\overline{AB}$, na kome se pritisak poveća od p - 1 na p, specifična zapremina $\alpha - 1$ = const manja nego na putu $\overline{CD}$ na kome se pritisak smanji od p na p - 1. Svi ti podaci odnose se, svakako, na određeni trenutak vremena.



Sl. 97. Ubrzanje cirkulacije duž linije koja zaklapa jedan izobar-izosterski solenoid

Prema jedn. (1) je ubrzanje cirkulacije duž ovakve linije ABCDA

$$(3) \quad \frac{dC'}{dt} = -(\alpha - 1) + \alpha = 1$$

Ubrzanje cirkulacije je prema tome jednako tačno jedinici. Ono je pozitivno, pošto je gradijentna sila na otseku puta $\overline{CD}$ usmerena u pravcu integraljenja i veća je nego na otseku puta $\overline{AB}$ gde ona deluje u suprotnom smislu.

Lako sada nađemo ubrzanje cirkulacije duž linije koja zaklapa N = N(α, - p) izobar-izosterskih solenoida:

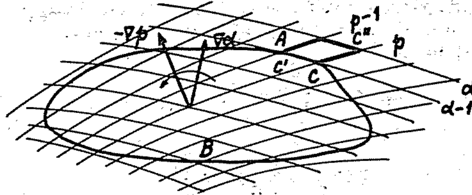
Neka je $\frac{dC'}{dt}$ ubrzanje cirkulacije duž linije ABCC'A u pravcu od ascendenta specifične zapremine prema gradijentu pritiska (sl. 98). Linija ABCC'A neka zaklapa N-izobar-izosterskih solenoida. U saglasnosti sa jedn. (1) i (3) je onda cirkulacija duž linije ABCC"A koja zaklapa jedan solenoid više

$$\frac{dC'}{dt} - \left(-\int_C^{C'} \alpha\, dp\right) - \left(-\int_{C'}^{A} \alpha dp\right) - \int_C^{C''} \alpha dp - \int_{C''}^{A} \alpha dp = \frac{dC'}{dt} + 1$$

Pošto je za N = 1 ubrzanje cirkulacije $\frac{dC'}{dt} = 1$, to na osnovu dobijenog opšteg pravila zaključujemo da za vazduh bez trenja posmatran u apsolutnom sistemu važi sledeće pravilo:

Ubrzanje cirkulacije C' (cirkulacija brzine) zatvorene materijalne linije jednako je broju izobar- izosterskih solenoida

$$(4) \quad \frac{dC'}{dt} = N(\alpha, -p)$$



Sl. 98. Ubrzanje cirkulacije u polju solenoida

koje kriva zaklapa i ima pravac od ascendenta zapremine $\nabla\alpha$ prema gradijentu pritiska $-\nabla p$. To je opšti V. Bjerknes-ov stav o obrazovanju vrtloga u tečnosti bez trenja. Do tog stava V. Bjerknes je došao pomoću poznatog Stokes-ovog stava o cirkulaciji (1845) prema kome za makoji vektor $\vec{a}$ kontinuarnog vektorskog polja važi

$$\oint \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_{\sigma} \mathrm{rot}\,\vec{a}\cdot d\vec{\sigma} \qquad (5)$$

($d\vec{\sigma}$ = vektorski element makoje površine koja je datom zatvorenom materijalnom linijom ograničena).

Stav o obrazovanju vrtloga zajedno sa jednačinom (2), V.Bjerknes je pronašao 1897 god. a godinu kasnije objavio. Sama jedn. (2) sa gore navedena dva stava bila je poznata već ranije (1895, J.R. Schütz i 1896 L. Silberstein). Bjerknes-ov stav o obrazovanju vrtloga bio je dugo nezapažen iako on znači napuštanje klasične hidrodinamike i uvod u fizičku hidrodinamiku koja tek počinje da povezuje pojave kretanja tečnosti sa termodinamikom, t.j. sa dovođenjem i odvođenjem toplote.

U svrhu praktičnog izračunavanja je zgodno ubrzanje cirkulacije izraziti još na jedan način:

U saglasnosti sa jednačinom stanja je

$$p\,d\alpha = -RT\frac{dp}{p} + R\,dT \qquad (6)$$

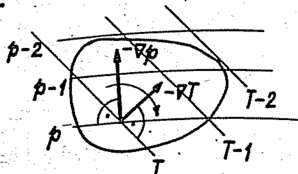
Zbog toga možemo mesto jedn. (2) pisati

$$\frac{dC'}{dt} = -R\oint T\,\delta(\ln p) \qquad (7)$$

ili analogno jedn. (4)

$$\frac{dC'}{dt} = RN(T, -\ln p) = N(-R\ln p, -T) \qquad (8)$$

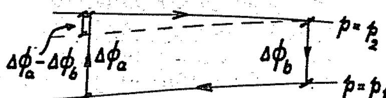
Ubrzanje cirkulacije se dakle vrši od gradijenta (logaritma) pritiska prema gradijentu temperature (sl. 99).



Sl.99.Ubrzanje cirkulacije u polju pritiska i temperature

Cirkulacija odn. ubrzanje cirkulacije jednostavno se određuje i duž naročito izabranih materijalnih linija. Za integraljenje je napr. povoljna linija koja ima izgled više ili manje savijenog četverougla (sl. 100), a od koga dve strane idu duž izobara $p = p_1$ i $p = p_2$, a ostale dve a i b u pravcu ili približno u pravcu gradijenta pritiska. Za ovakvu liniju je prema jedn. (1) ubrzanje cirkulacije

$$\frac{dC'}{dt} = -\int_{p_1}^{p_2} (\alpha_a - \alpha_b)\,\delta p = R(\bar{T}_a - \bar{T}_b)\ln\frac{p_1}{p_2} \qquad (9)$$



Sl. 100

(α_a, α_b = specifična zapremina na putu a odn. b, $\bar{T}_a$, $\bar{T}_b$ = srednja temperatura na putu a odn. b).

Ako izobare leže jedna iznad druge u atmosferi gde je ispunjena osnovna jednačina statike, onda je $\alpha dp = -g dz$, i

(10) $$\frac{dC'}{dt} = \Delta\varphi_a - \Delta\varphi_b$$

($\Delta\varphi_a$, $\Delta\varphi_b$ = otstojanje izobarske površine $p = p_2$ od izobarske površine $p = p_1$ izraženo u jedinicama geopotencijala na otseku puta a odn. b, sl. 100).

J.W. Sandström je izradio tablice za brzo određivanje ubrzanja cirkulacije u atmosferi.

3. Relativna cirkulacija

Videli smo da je vektor relativne brzine vazduha $\vec{u}$ za posmatrača koji zajedno sa Zemljom rotira sa apsolutnom brzinom $\vec{u}'$ vezan relacijom

$$\vec{u}' = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Skalarnim množenjem elementom puta $\delta\vec{r}$ duž zatvorene materijalne linije dobijamo

(1) $$C' = C + \oint \vec{\omega} \times \vec{r} \cdot \delta\vec{r} = C + \vec{\omega} \cdot \oint \vec{r} \times \delta\vec{r}$$

gde je

$$C' = \oint \vec{u}' \cdot \delta\vec{r} \quad \text{i} \quad C = \oint \vec{u} \cdot \delta\vec{r}$$

apsolutna odn. relativna cirkulacija. Iz jedn. (1) i 2 (4) vidimo da je za posmatrača na Zemlji ubrzanje cirkulacije

(2) $$\frac{dC}{dt} = N(\alpha, -p) - \vec{\omega} \cdot \oint \vec{u} \times \delta\vec{r} - \vec{\omega} \cdot \oint \vec{r} \times \delta\vec{u}$$

Ako uzmemo u obzir da je

$$\vec{r} \times \delta\vec{u} = \delta(\vec{r} \times \vec{u}) + \vec{u} \times \delta\vec{r}$$

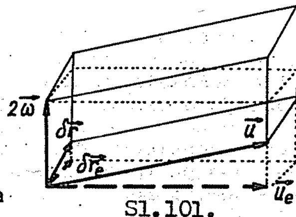
to mesto jedn. (2) možemo pisati

(3) $$\frac{dC}{dt} = N(\alpha, -p) - 2\vec{\omega} \cdot \oint \vec{u} \times \delta\vec{r}$$

Integral koji potiče od rotacije Zemlje nije teško tumačiti:

Apsolutna vrednost izraza $2\vec{\omega} \cdot \vec{u} \times \delta\vec{r}$ jednaka je zapremini paralelepipeda sa ivicama $|\vec{u}|$, $|\delta\vec{r}|$ i 2ω (sl. 101) odn. sa ivicama u_e, ds_e i 2ω, gde su u_e i ds_e projekcije vektora brzine $\vec{u}$ odn. elementa linije $\delta\vec{r}$ na ekvatorijalnu ravan.

U jedinici vremena element linije $\delta\vec{r}$ opiše površinu $|\vec{u} \times \delta\vec{r}|$ čija projekcija na ekvatorijalnu ravan je $|\vec{u}_e \times \delta\vec{r}_e|$ ($\vec{u}_e$, $\delta\vec{r}_e$ = projekcija vektora

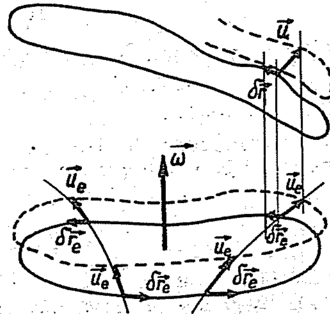


Sl. 101.

brzine odn. elementa puta na ekvatorijalnu ravan). Ako izaberemo ciklonalni pravac integraljenja, tj. pravac obrtanja Zemlje (sl. 102), onda je normalna komponenta vektora $\vec{u} \times \delta \vec{r}$ na ekvatorijalnu ravan pozitivna odn. negativna kyda je $\vec{u}_e$ usmereno od površine odn. prema površini Σ koju zatvara projekcija linije na ekvatorijalnu ravan duž koje tražimo ubrzanje cirkulacije. Kad uzmemo ovo u obzir vidimo da je

$$(4) \qquad 2\vec{\omega} \cdot \oint \vec{u} \times \delta \vec{r} = 2\omega \frac{d\Sigma}{dt}$$

gde je $\frac{d\Sigma}{dt}$ promena površine Σ u jedinici vremena. Prema tome je u saglasnosti sa jedn. (3) ubrzanje cirkulacije u odnosu na Zemlju



Sl. 102. Ekvatorijalna projekcija površine koju u jedinici vremena opiše zatvorena materijalna linija

$$(5) \qquad \frac{dC}{dt} = N(\alpha, -p) - 2\omega \frac{\delta \Sigma}{\delta t}$$

Time smo došli do stava o cirkulaciji za relativna kretanja. To je drugi Bjerknes-ov stav o cirkulaciji i odnosi se na obrazovanje relativnog vrtloga (1902). Prema ovom stavu može u otsustvu sila trenja cirkulacija materijalne linije u odnosu na Zemlju koja rotira da se menja iz dva uzroka: zbog postojanja izobar-izosterskih solenoida koje zaklapa linija cirkulacije (solenoidalni efekat) i zbog menjanja ekvatorijalne projekcije površine koju zaklapa linija cirkulacije (efekat inercije). Solenoidalni efekat ima za posledicu povećavanje cirkulacije u smislu od ascendenta zapremine do gradijenta pritiska ili od gradijenta pritiska prema gradijentu temperature. Zbog efekta inercije, cirkulacija se ubrzava u ciklonalnom odn. anticiklonalnom smislu već prema tome da li se ekvatorijalna projekcija linije cirkulacije u toku vremena smanjuje ili povećava. Tako napr. smanjivanje dužine horizontalne linije cirkulacije (konvergencija) ubrzava cirkulaciju u ciklonalnom, a povećavanje (divergencija) u anticiklonalnom smislu.

Cirkulisanje vazduha u atmosferi uvek je praćeno sa izvesnim pretvaranjem energije. Naročito je interesantno pretvaranje u slučaju stacionarnog cirkulisanja vazduha kao što smo videli ranije (XIII-8). U te probleme ovde nećemo dalje ulaziti.

4. Jednačina vrtložnosti

Iz jednačina kretanja za strujanje vazduha u horizontalnom pravcu bez trenja može se izvesti tzv. jednačina vrtložnosti. Ta jednačina pokazala se kao vrlo korisna za tumačenje dugih talasa koji postoje u višim slojevima troposfere. Zbog razlika u temperaturi između ekvatora i polova na tim visinama duvaju jaki vetrovi uglavnom u zonalnom pravcu od zapada prema istoku. Ta velika vazdušna struja je talasaste prirode obično sa četiri do pet talasa oko cele hemisfere.

Pomoću jednačine vrtložnosti određuje se individualna promena rotacije vektora brzine, što je od posebnog značaja za tumačenje kretanja vazduha u ciklonima i anticiklonima, u vrtlozima najvećih razmera, kao i u vrtlozima manjih razmera. Ta jednačina pokazala se kao korisna i u numeričkoj prognozi. Ovde ćemo je izvesti pod najopštijim uslovima.

U saglasnosti sa jedn. II-8: (2) i (4^a) kad uzmemo u obzir još sile trenja, jednačine kretanja u koordinatnom sistemu sa z-osom prema zenitu i x-osom prema istoku možemo pisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w = -\alpha\frac{\partial p}{\partial x} + C_1 + R_1\\
(1)\quad &\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w = -\alpha\frac{\partial p}{\partial y} + C_2 + R_2\\
&\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w = -g - \alpha\frac{\partial p}{\partial z} + C_3 + R_3
\end{aligned}$$

(C_i, R_i = komponente sile devijacije odn. trenja koje deluju na jedinicu mase).

Diferenciranjem treće jednačine po y i druge po z dobijamo posle oduzimanja jedne jednačine od druge i sređivanja sledeću jednačinu

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}u + \frac{\partial \zeta_1}{\partial y}v + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z}w +\\
(2)\quad &\left[\zeta_1\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right] =\\
&\frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial C_3}{\partial y} - \frac{\partial C_2}{\partial z} + \frac{\partial R_3}{\partial y} - \frac{\partial R_2}{\partial z}
\end{aligned}$$

gde je ζ_1 x-komponenta vektora

$$(3)\quad \vec{\zeta} = \nabla x \vec{u} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$

Lako se možemo uveriti da možemo dodavanjem podesnih članova i oduzimanjem istih izraz u srednjoj zagradi na levoj strani jednačine (2) pisati na sledeći način:

$$\zeta_1 \nabla\cdot\vec{u} - \vec{\zeta}\cdot\nabla u$$

Ako uzmemo ovo u obzir vidimo da jednačinu (2) možemo pisati i na sledeći način:

$$(4)\quad \frac{d\zeta_1}{dt} = -\zeta_1\nabla\cdot\vec{u} + \vec{\zeta}\cdot\nabla u - \left[\nabla\alpha x\nabla p\right]_1 + \left[\nabla x\vec{C}\right]_1 + \left[\nabla x\vec{R}\right]_1$$

Indeksom 1 označene vrednosti pretstavljaju komponente odgovarajućih vektora u pravcu x. Treći član na desnoj strani je x-komponenta vektora

$$(5)\quad \nabla x(-\alpha\nabla p) = -\nabla\alpha x\nabla p$$

koji se zove vektor baroklinosti (str. 215 i 236).

Sličnim postupkom nalazimo jednačine za individualne promene rotacija vektora brzine u pravcima y i z, što nas dovodi do opšte jednačine vrtložnosti za relativno kretanje

$$(6) \qquad \frac{d\vec{\zeta}}{dt} = -(\nabla \cdot \vec{u})\vec{\zeta} + \vec{\zeta} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla x(-\alpha \nabla p) + \nabla x \vec{C} + \nabla x \vec{R}$$

Ako u ovoj jednačini smatramo da sila devijacije ne postoji (ω = 0), onda nam ona prelazi u jednačinu vrtložnosti za apsolutno kretanje

$$(7) \qquad \frac{d\vec{\eta}}{dt} = -(\nabla \cdot \vec{u}')\vec{\eta} + \vec{\eta} \cdot \nabla \vec{u}' + \nabla x(-\alpha \nabla p) + \nabla x \vec{R}$$

Mesto $\vec{\zeta}$ i $\vec{u}$ upotrebili smo ovde oznake $\vec{\eta}$ i $\vec{u}'$ koje pretstavljaju vektore apsolutne vrtložnosti odn. apsolutne brzine.

Za proučavanje dugih talasa i vrtloga u atmosferi, tj. ciklona i anticiklona, tornada, pijavica i vihora, tj. vrtloga sa vertikalnom ili približno vertikalnom osom rotacije koristi se prvenstveno jednačina vrtložnosti za vertikalni pravac z.

Sila devijacije zavisi od veličina f i f'. Ove veličine se u pravcima x i z ne menjaju, tako da je

$$(8) \qquad \frac{\partial f'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f'}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Ako uzmemo ovo u obzir, vidimo da je u saglasnosti sa definicijom sile devijacije II-4 (16)

$$\left[\nabla x \vec{C}\right]_3 = \frac{\partial}{\partial x}(-fu) - \frac{\partial}{\partial y}(fv - f'w) = -f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - v\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial (f'w)}{\partial y}$$

Kad uzmemo ovo u (6) u obzir, dobijamo za individualnu promenu z-komponente $\zeta_3 = \zeta$ rotacije vektora brzine

$$(9) \qquad \frac{d\zeta}{dt} = -(\zeta + f)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}v + \frac{\partial (f'w)}{\partial y} - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial R_1}{\partial y}\right)$$

Iz dobivene jednačine vidimo da na vrtložnost ζ (= relativna vrtložnost) utiče više faktora. U svrhu daljeg tumačenja ovih uticaja želimo prvo skrenuti pažnju da možemo u saglasnosti sa jedn. II-3 (9) i I-5 (17) apsolutnu rotaciju

$$(10) \qquad \vec{\eta} = \nabla x \vec{u}'$$

apsolutne brzine $\vec{u}'$ izraziti sa relativnom rotacijom $\vec{\zeta}$ relativne brzine $\vec{u}$ na sledeći način:

$$(11) \qquad \vec{\eta} = \vec{\zeta} + 2\vec{\omega}$$

Odavde vidimo da je vertikalna komponenta apsolutne

rotacije $\eta_3 = \eta$, tj. apsolutna vrtložnost

(12) $$\eta = \zeta + f$$

Lokalna promena vektora ugaone brzine Zemlje svuda u polju jednaka je nuli. Zbog toga i (8) je

(13) $$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y} v$$

Ako dobivene vrednosti (12) i (13) unesemo u jedn. (9), dobijamo za individualnu promenu apsolutne vrtložnosti

(14) $$\frac{d\eta}{dt} = -\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial (f'w)}{\partial y} - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial R_1}{\partial y}\right)$$

Pojedine članove koji se nalaze na desnoj strani dobivene jednačine možemo kratko tumačiti na sledeći način:

Prvi član potiče od horizontalne divergencije vektora brzine. U saglasnosti sa jednačinom kontinuiteta možemo pisati

(15) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt}$$

Ako smatramo da su u jedn. (14) sem prvog svi ostali članovi na desnoj strani srazmerno mali, onda je, (15),

(16) $$\frac{d\eta}{dt} = -\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\eta\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt}\right)$$

Pod ovim uslovima ima kontrakcija, tj. horizontalna konvergencija za posledicu povećavanje vrtložnosti ako je $\eta > 0$ odn. smanjivanje ako je $\eta < 0$ (rotacija u smislu skazaljke na satu). Ukoliko je $\eta > 0$, individualna promena vrtložnosti srazmerna je vrtložnosti η i horizontalnoj konvergenciji vektora brzine.

Opisani efekat konvergencije, koji je uvek praćen odgovarajućim strujanjem vazduha i u vertikalnom pravcu, od naročitog je značaja za atmosfersku dinamiku. Svuda gde se javljaju jaka uzlazna strujanja postoji mogućnost za stvaranje vrtloga.

Integraljenjem jedn. (16) dobijamo

(17) $$\eta = \eta_0 e^{-\overline{D}t}$$

gde je $\overline{D}$ srednja vrednost horizontalne divergencije $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ na putu pređenom u vremenu t. Vrtložnost se u tom slučaju u toku vremena eksponencijalno povećava i može narasti do vrednosti koje mogu da budu od katastrofalnog dejstva.

Drugi član na desnoj strani jedn. (14) možemo pisati na sledeći način:

(18) $$\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} = \zeta_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \zeta_2 \frac{\partial v}{\partial z}$$

Ako je $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$, ako je dakle osa vrtloga vertikalna, onda taj član ne postoji. Taj član zavisi od horizontalnih komponenata re-

lativne rotacije vektora brzine i od menjanja komponenata brzine u i v sa visinom. Taj čalan kao i sledeći, pri proučavanju vrtloga većih razmera sa približno vertikalnom osom rotacije i sa srazmerno malim vertikalnim brzinama, može se zanemariti.

Četvrti član pretstavlja solenoidalni efekat. On je po apsolutnom iznosu to veći što veća je gustina izobar-izosterskih solenoida koji seku horizontalnu ravan. Na koji način i u kom smislu utiče taj efekat na vrtložnost proizlazi iz ranijih tumačenja cirkulacije (XIV-2).

U svrhu tumačenja poslednjeg člana na desnoj strani posmatrane jednačine, zamislimo da je osa x usmerena u pravcu strujanja. U tom slučaju možemo za prizemni vazduh pisati (IX-2: (7) i (8))

(19) $$R_1 = -ku\cos\gamma \quad i \quad R_2 = -ku\sin\gamma$$

Zamislimo prvo da vazduh kao čvrsto telo rotira oko vertikalne ose. U tom slučaju je $R_1 = -ku$, $R_2 = 0$ i brzina se u pravcu ose y smanjuje. U tom slučaju je član koji potiče od trenja negativan, što znači da spoljašnje trenje koči razvoj vrtloga. Pošto u atmosferi postoje razne mogućnosti u pogledu raspodele brzine u vrtlogu, trenje i turbulencija mogu na razne načine da utiču na vrtložnost.

5. Dugi talasi

Posmatranje strujanja vazduha u atmosferi u najvećim razmerama i na većim visinama navelo je Rossby-ja na misao da se za ovakva vazdušna strujanja može reći da su uglavnom horizontalna i bezdivergentna. Pošto se ona vrše uglavnom u zonalnom pravcu možemo u prvoj aproksimaciji pretpostaviti da se vrše adijabatski u pravcu izobara. Ako pored toga sile trenja zanemarimo, jednačina vrtložnosti glasi

(1) $$\frac{d\zeta}{dt} = -\beta v$$

gde je

(2) $$\beta = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{2\omega\cos\varphi}{R}$$

(R = poluprečnik Zemlje) tzv. Rossby-jev parametar. Za tumačenje dugih talasa ova vrednost je od posebnog značaja, što je prvi uočio Rossby sa saradnicima (1939). Na polu je $\beta = 0$, a na ekvatoru je $\beta = 2,29 \cdot 10^{-11} m^{-1} sec^{-1}$.

Strujanje neka se vrši uglavnom u zonalnom pravcu, tj. u pravcu ose x. Komponenta brzine u tom pravcu neka bude u_0. U pravcu ose y neka se vektor brzine ne menja tako da je

(3) $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Kad uzmemo ovo u obzir i jednačinu kontinuiteta

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

vidimo da važi još

(4) $$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

da je dakle u_o konstantna vrednost.

Ako sada individualnu promenu vrtložnosti iz jedn. (1) izrazimo pomoću lokalne i geometrijskih promena, uzmemo u obzir jedn. (3), 4 (3) i (1) i zanemarimo član sa komponentom v kao mali drugog reda, dobijamo jednačinu

(5) $$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + u_o \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v = 0$$

Ukoliko se radi o manjim promenama geografske širine prilikom kretanja vazduha, možemo u prvoj aproksimaciji smatrati β konstantnim a jedn. (5) linearnom. Očigledno je jedan partikularan integral te jednačine sledeći:

(6) $$v = A \sin \gamma (x - C_r t)$$

Ovde je γ broj talasa (XI-3 (10)) a C_r fazna brzina (XI-3 (7)), tj. brzina kojom se prostire talas u odnosu na vazduh. Unošenjem jedn. (6) u jedn. (5) dobijamo za faznu brzinu

(7) $$C_r = u_o - \frac{\beta}{\gamma^2}$$

Ovo je poznata Rossby-jeva formula koja kaže da se pod gornjim uslovima u odnosu na vazduh talas prostire prema zapadu odn. istoku kada je

(8) $$u_o \lessgtr \frac{\beta}{\gamma^2}$$

Kada je pak (XI-3 (10))

(9) $$u_o = \frac{\beta}{\gamma^2} \qquad \text{ili} \qquad l = 2\pi \sqrt{\frac{u_o}{\beta}}$$

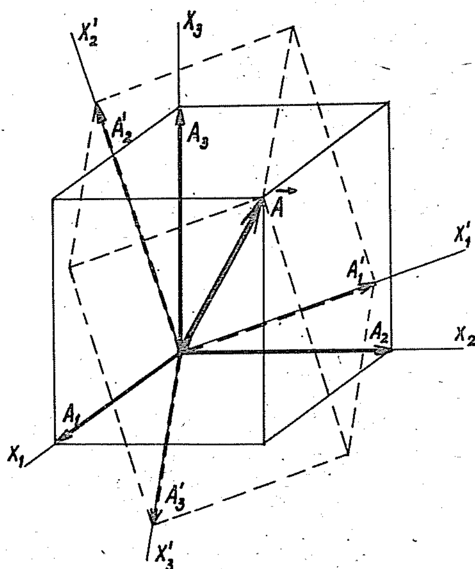
talas je stacionaran (l = talasna dužina).

Pri $\varphi = 45^o$ i $u_o = 10$ msec^{-1} je napr. $l = 5000$ km. Dužina takvih talasa je dakle vrlo velika. Dnevne sinoptičke vremenske karte za 500 mb površinu potvrđuju postojanje takvih dugih talasa o kojima biće više reči u drugom delu ovog udžbenika. Ove talase prvi je teorijski objasnio Rossby sa saradnicima (1939) i nazivaju se Rossby-jevi talasi.

DODATAK

1. Vektori i transformacija koordinatnog sistema

Videli smo da u atmosferi postoje najraznovrsniji vektori. U svrhu njihovog prikazivanja koristili smo razne ortogonalne koordinatne sisteme sa raznim orijentacijama u prostoru i smatrali smo da, bez obzira na orijentaciju koordinatnog sistema, vektorske komponente nekog vektora, o kome je bilo reči, pretstavljaju uvek taj isti vektor. Smatrali smo, drugim rečima, da bez obzira na orijentaciju koordinatnog sistema komponente vektora u pravcu osa daju uvek istu rezultantu (sl. 103). Da to mora ovako da buda kod vektora kao što su vektor brzine, ubrzanja, sile itd. je razumljivo samo po sebi, ali da je to slučaj i kod vektora kao što su vektorski proizvod dva vektora, rotacija vektora i gradijent neke skalarne veličine nije samo po sebi razumljivo. To treba tek dokazati.



Sl. 103. Vektor kao rezultanta ortogonalnih komponenata u dva proizvoljno izabrana desna ortogonalna koordinatna sistema

U slici 103 prikazane su komponente vektora $\vec{A}$ u desnom ortogonalnom koordinatnom sistemu $S(x_1,x_2,x_3)$. Prikazana je i ortogonalna komponenta A_1' u pravcu proizvoljno izabrane linije x_1' koja ide kroz koordinatni početak O(o,o,o) i koja pretstavlja jednu od osa nekog drugog desnog ortogonalnog koordinatnog sistema S' sa početkom u istoj tačci O. Kao što vidimo iz sl. 104, komponenta A_1' jednaka je zbiru projekcija komponenatá A_1, A_2 i A_3 na pravac x_1':

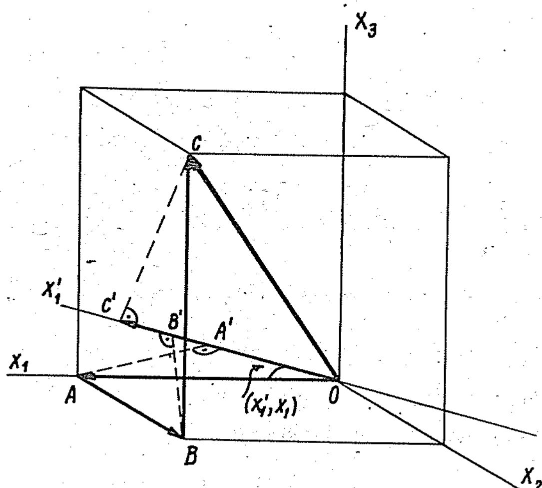
$$A_1' = A_1\cos(x_1',x_1) + A_2\cos(x_1',x_2) + A_3\cos(x_1',x_3)$$

((x_1',x_1), (x_1',x_2), (x_1',x_3) = uglovi koje gradi osa x_1' sa osama x_1, x_2 odn. x_3). Slično možemo izraziti sa komponentama A_1,

A_2 i A_3 i komponente u pravcima x_2' i x_3'. Ako kosinuse pravaca x_i' i x_k pišemo u obliku a_{ik}, tako da je napr.

$a_{23} = \cos(x_2', x_3)$

onda vidimo da važe sledeće jednačine



Sl. 104

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
A_1' &= a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3 \\
A_2' &= a_{21}A_1 + a_{22}A_2 + a_{23}A_3 \\
A_3' &= a_{31}A_1 + a_{32}A_2 + a_{33}A_3
\end{aligned}
$$

Polazeći od koordinatnog sistema $S(x_1', x_2', x_3')$, dođemo na isti način do jednačina koje daju komponente A_i kao funkcije komponenata A_k':

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
A_1 &= a_{11}A_1' + a_{21}A_2' + a_{31}A_3' \\
A_2 &= a_{12}A_1' + a_{22}A_2' + a_{32}A_3' \\
A_3 &= a_{13}A_1' + a_{23}A_2' + a_{33}A_3'
\end{aligned}
$$

Množenjem jedn. (1) redom sa a_{11}, a_{21}, a_{31} i sabiranjem dobijamo na levoj strani izraz koji stoji na desnoj strani jedn. (2^1). Kad uzmemo ovo u obzir i sličan pos-tupak primenimo još na ostale dve komponente, vidimo da važe sledeće jednačine

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1 \qquad & a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31} &= 0 \\
a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1 \qquad & a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} &= 0 \\
a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1 \qquad & a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} + a_{33}a_{32} &= 0
\end{aligned}
$$

Ako sličnim postupkom iz drugog sistema jednačina izračuname komponente A_i' i tako dobivene vrednosti uporedimo sa onima iz sistema (1), vidimo da važi još sledećih 6 jednačina:

$$(4)\quad \begin{array}{ll} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1 & a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} + a_{23}a_{13} = 0 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1 & a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = 0 \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 & a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{23} = 0 \end{array}$$

Ako iz linearnog sistema jedn. (1) izračunamo A_i i dobivene vrednosti uporedimo sa sistemom (2), dobijamo još sledećih devet jednačina:

$$(5)\quad \begin{array}{lll} a_{11} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}, & a_{12} = a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21}, & a_{13} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} \\ a_{21} = a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}, & a_{22} = a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31}, & a_{23} = a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32} \\ a_{31} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}, & a_{32} = a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11}, & a_{33} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{array}$$

gde smo uzeli u obzir da je

$$(6)\quad |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix} = 1$$

Da je ta determinanta, tj. determinanta kosinusa pravaca (ortogonalna determinanta), jednaka jedinici vidimo odmah ako napr. jedn. prve vrste u sistemu (5) u kome su još desne strane podeljene sa a_{ik} množimo redom sa a_{11}, a_{12}, a_{13} i uzmemo u obzir jedn. (4).

Iz jednačina (1) i (2), koje kažu da bez obzira na orijentaciju ortogonalnog desnog koordinatnog sistema komponente vektora u pravcu osa daju uvek istu rezultantu, proizlaze jedn. (3) do (6). Ako su, prema tome, uopšte B_1, B_2, B_3 tri funkcije koordinata x, y, z, onda nam one u tom i samo u tom slučaju pretstavljaju komponente nekog vektora B_i ako se prilikom transformacije koordinatnog sistema ponašaju jednako kao gore prikazane komponente vektora A_i.

U sistemu S neka budu

$$(7)\quad B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \quad B_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \quad B_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

komponente rotacije vektora A_k. Da one stvarno pretstavljaju komponente nekog vektora, vidimo na sledeći način:

Očigledno je

$$(8)\quad \frac{\partial A_3}{\partial x_2} = \frac{\partial A_3}{\partial x_1'}\frac{\partial x_1'}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_2'}\frac{\partial x_2'}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3'}\frac{\partial x_3'}{\partial x_2}.$$

Pošto za vektor položaja $r_i = (x_1, x_2, x_3)$ važe slične jedn. (1) kao za vektor A_i, to je

$$(9)\quad \frac{\partial x_1'}{\partial x_2} = a_{12}, \quad \frac{\partial x_2'}{\partial x_2} = a_{22}, \quad \frac{\partial x_3'}{\partial x_2} = a_{32}$$

Slično je

$$(10)\qquad \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = a_{13}\frac{\partial A_2}{\partial x_1'} + a_{23}\frac{\partial A_2}{\partial x_2'} + a_{33}\frac{\partial A_2}{\partial x_3'}$$

Ako sada uzmemo u obzir jedn. (2) i posle toga jedn. (5), dobijamo iz jedn. (8), (9), (10) i (7) posle kraćeg izračunavanja

$$(11)\qquad B_1 = a_{11}B_1' + a_{21}B_2' + a_{31}B_3'$$

gde su

$$(12)\qquad B_1' = \frac{\partial A_3'}{\partial x_2'} - \frac{\partial A_2'}{\partial x_3'}\ ,\quad B_2' = \frac{\partial A_1'}{\partial x_3'} - \frac{\partial A_3'}{\partial x_1'}\ ,\quad B_3' = \frac{\partial A_2'}{\partial x_1'} - \frac{\partial A_1'}{\partial x_2'}$$

Dobivena jedn. (11) po obliku je jednaka jedn. (2[1]). Primenom sličnog postupka na vrednosti B_2 i B_3 dobili bismo još dve jednačine koje su po obliku jednake drugoj i trećoj jednačini sistema (2). Pošto se dakle vrednosti B_i transformišu kao komponente vektora, to one stvarno pretstavljaju komponente vektora.

Slično možemo dokazati da su gradijent i vektorski proizvod dva vektora vektori.

Na kraju želimo još kratko tumačiti jedn. (3) do (6).

Jedinični vektori (ortovi) u pravcima x_1, x_2, x_3 su sledeći:

$$(13)\qquad \vec{e}_1 = (1,0,0)\ ,\ \vec{e}_2 = (0,1,0)\ ,\ \vec{e}_3 = (0,0,1)$$

U saglasnosti sa jedn. (1) ovi vektori, izraženi pomoću komponenata u sistemu S', glase

$$(14)\qquad \vec{e}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})\ ,\ \vec{e}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})\ ,\ \vec{e}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$$

Slično jedinični vektori u pravcima x_1', x_2', x_3' sistema S' u saglasnosti sa jedn. (2), izraženi pomoću komponenata u sistemu S, glase

$$(15)\qquad \vec{\varepsilon}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})\ ,\ \vec{\varepsilon}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})\ ,\ \vec{\varepsilon}_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$$

Vidimo da nam a_{ik} pretstavlja tenzor koji ima za vektore vrsta jedinične vektore u pravcima x_1', x_2', x_3', a za vektore kolona jedinične vektore u pravcima x_1, x_2, x_3. Kad imamo ovo na umu, vidimo da možemo svaku komponentu vektora $\vec{A}_i$ tumačiti kao skalarni proizvod iz tog vektora i jediničnog vektora u pravcu te komponente, (1), (2). Prva grupa jedn. (3) i (4) nam kaže da je apsolutni iznos vektora $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ i $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3$ jednak jedinici, a druga grupa tih jednačina nam kaže da jedinični vektori sistema S kao i sistema S' stoje normalno jedan na drugom.

U sistemu S kao i u sistemu S' možemo očigledno svaki jedinični vektor tumačiti kao vektorski proizvod ostala dva jedinična vektora. To nam izražavaju jedn. (5). Da je, konačno, zapremina kocke koje grade jedinični vektori sistema S kao i sistema S' jednaka jedinici, kaže nam jedn. (6).

2. Kratak pregled razvoja dinamičke meteorologije

Već u starom veku počelo se sa skupljanjem raznih meteoroloških podataka i sa opisivanjem atmosferskih pojava. Prvi udžbenik meteorologije potiče od Aristotelesa (350 pre naše ere).

Posle pronalaska termometra (Galileo Galilei, 1592) i barometra (Torriceli, Viviani, 1643) počelo se u 17. i 18. veku na više mesta sa redovnim merenjima temperature i pritiska vazduha i sa skupljanjem izmerenih i drugih meteoroloških podataka.

Na drugoj strani dolazi fizika jednovremeno do svojih osnovnih otkrića, do otkrića koja su bila za dalji razvoj meteorologije kamen temeljac. Newton (1643-1727) pronalazi osnovne zakone dinamike koje je veliki švajcarski matematičar Euler (1707-1783) primenio na tečnosti (Eulerove hidrodinamičke jednačine kretanja). Pronađeni su zakoni o gasovima (Boyle-Mariotte-ov zakon, 1662 i 1676, Amontonov zakon). Dalja fundamentalna otkrića fizike u 19. veku, kao što su prvenstveno prvi i drugi princip termodinamike i opšta matematička formulacija sile devijacije zemljine rotacije (Coriolis, 1835) još su povećala osnov na kome je počela izgradnja dinamičke meteorologije.

O dinamičkoj meteorologiji u ono doba nije moglo još da se govori. Teoriski radovi meteorološke prirode bili su osamljeni i napisani od velikih filozofa, fizičara, matematičara i astronoma. Tako je 1637. god. René Descartes, slavni francuski filozof i matematičar, objavio svoju teoriju duge. E Halley, engleski astronom, prvi je napisao (1686) barometarsku visinsku formulu. D'Alember, čuveni francuski matematičar, napisao je"Teoriju vetrova" (1746). Veliki nemački matematičar i astronom C.F. Gauss objavio je 1818. god. prve hipsometriske tablice. I veliki Bessel bavio se pitanjem opadanja atmosferskog pritiska sa visinom i 1835.god. objavljuje rad "Barometarska visinska formula".

Pronalaskom telegrafa, a povodom velike pogibije u nov. 1854. god. koja je zadesila francusku flotu zbog neočikivane oluje za vreme Krimskog rata, usidrenu u Crnom Moru, došlo je do jedne od najznačajnijih prelomnica u razvoju meteorologije. Veliki francuski astronom U. Leverrier (1811-1877), pronalazač planete Neptun, pokazao je da bi se katastrofa mogla izbeći kad bi stajale na raspoloženju sinoptičke vremenske karte za taj dan. Na osnovu toga, uz veliko zalaganje autoriteta Leverrier-a,počelo se u Parizu od 16. sept. 1863 god. sa dnevnim crtanjem sinoptičkih vremenskih karata. Ubrzo su sledile tom primeru i ostale napredne zemlje. Time je bila data osnova za proučavanja razvoja vremena na velikim prostranstvima.

U drugoj polovini osamnaestog veka već se češće pojavljuju meteorološki teoriski radovi. Buys-Ballot formuliše barički zakon vetrova (1857) koji je inače već davno ranije pronašao Hadley (1735). Amerikanac W. Ferrel daje 1860. god. jednačine kretanja u relativnom sistemu koji zajedno sa Zemljom rotira i pronalazi obrazac za visinu nivoa kondenzacije (1889). Slavni engleski fizičar W. Thomson (Lord Kelvin) prvi uočava (1865) značaj adijabatskih procesa za zagrevanje vazduha pri padajućem vetru fenu.Veliki

fizičari J.C. Maxwell (1877) i Stefan daju obrazac za isparavanje vode u atmosferi. Guldberg i Mohn uvode (1877) spoljašnje trenje u jednačine kretanja vazduha. W. Bezold definiše 1888 god. pseudoadijabatu, a malo kasnije daje i definiciju specifične vlažnosti i odnosa smese (1894). H. Hertz, nemački fizičar pronalazač elektromagnetskih talasa, objavljuje 1884. godine u novo osnovanom meteorološkom časopisu Austrougarske rad o grafičkim metodama za određivanje veličina stanja prilikom adijabatskih kretanja vazduha.

Od naročitog značaja za dalji razvoj dinamičke meteorologije bili su radovi slavnog nemačkog fizičara i fiziologa H. Helmholtza. Nisu bila od značaja samo njegova klasična dela iz fizike već i njegovi teoriski meteorološki radovi koje je pri kraju svog života objavio (1888, 89 i 90). Tamo diskutuje o cirkulaciji atmosfere, o talasima na graničnim površinama i daje teoriju tropskih ciklona. Među ostalim uočava značaj diskontinuitetnih površina u atmosferi za dinamiku atmosfere i dolazi do jednog integrala hidrodinamičkih jednačina kretanja koji sadrži kao poseban slučaj i talase na plitkoj i dubokoj vodi (Lagrange-ovi i Stokes-ovi talasi).

Genijalne ideje Helmholtza dale su potstreka za dalji rad velikim fizičarima i matematičarima. Ovde mislimo na V. Bjerknesa (1862-1951), tvorca tzv. Bergenske (Norveške) škole i M. Margulesa (1856-1920), eminentnog pretstavnika Bečke meteorološke škole. V. Bjerknesa i M. Margulesa možemo zajedno sa H. Helmholtzom smatrati pionirima moderne meteorologije i osnivačima dinamičke meteorologije.

Maks Margules studirao je u Beču matematiku i fiziku i u periodu 1877-1889 napisao je veliki broj radova iz fizike i fizičke hemije. Kasnije se posvetio problemima teoriske meteorologije i u periodu 1890-1906 napisao je brojne meteorološke radove koje možemo smatrati klasičnim, tj. takvim da su bili za dalji razvoj dinamičke meteorologije od osnovnog značaja.

M. Margules je znao da su savesna posmatranja prirodnih pojava jedan od uslova koji mogu da nas dovedu do novih saznanja. Zbog toga je u poslednjoj dekadi 19. veka organizovao pet stanica sa barografima i termografima. Jedna je bila u Beču, a četiri na približno jednakom otstojanju 58-63 km daleko od centralne stanice u Beču. Na osnovu obrade dobivenih podataka, Margules je došao do osnovne koncepcije da treba glavni izvor kinetičke energije vetrova u atmosferi tražiti u težinskoj potencijalnoj energiji hladnih vazdušnih masa. U najznačajnijim njegovim teoriskim radovima (1901, 05, 06) Margules je dao osnovne jednačine energetike atmosfere za zatvorene sisteme i pokazao je u više primera da je težinska potencijalna energija koju poseduju hladne vazdušne mase dovoljna za tumačenje olujnih vetrova u atmosferi. Ovaj Margulesov zaključak, koji je bio u saglasnosti i sa Bjerknesovom teorijom o postanku ciklona, bitno je uticao na meteorološku misao čitave epohe.

Margules je dalje u četiri teoriska rada (1890, 92, 93) došao do rešenja hidrodinamičkih jednačina kretanja kojim opisuje dnevni hod atmosferskog pritiska. Time je dao teoriju ovog kolebanja koja se danas zove resonantna teorija o dnevnom kolebanju pritiska. Margules je u toj svojoj teoriji potvrdio hipotezu Lorda

Kelvina (1882) da je glavni period sopstvenog titranja atmosfere 12 sati.

Dalje je Margules, inspirisan Helmholtzovim idejama o značaju hladnog polarnog vazduha za opštu cirkulaciju atmosfere, došao do poznate formule, Margulesove formule, za nagib graničnih površina u atmosferi. Prvi je napisao jednačinu tendencije atmosferskog pritiska (1904), izračunao koje dovođenje toplote je potrebno da se pri stacionarnim cirkulacijama održavaju određene razlike u pritiscima (1901) i pokazao kako se menja vertikalni temperaturni gradijent prilikom spuštanja vazduha u anticiklonu (1906). Svojim radom Margules je pokazao kojim putem treba ići prilikom rešavanja problema iz dinamičke meteorologije. Pokazao je šta znači za meteorologa-istraživača poznavanje matematike i teoriske fizike.

Vilhelm Bjerknes bio je rođen u Oslu (Norveška). Studirao je u Göttingenu i tamo se upoznao sa mladim H. Hertzom koji je bez sumnje uticao na njegov dalji rad. Prvi učitelj bio mu je otac C. A. Bjerknes koji je napisao zapažene radove iz klasične hidrodinamike. U želji da proširi očeva saznanja o međusobnim hidrodinamičkim uticajima pojedinih tela koja se u tečnosti nalaze, V. Bjerknes je zapazio, kao što sam kasnije piše (1933), "da za vektor specifične količine kretanja u prelaznom sloju između okružujuće tečnosti i tela u tečnom stanju mora da postoji tendencija za stvaranje vrtloga." Tim putem V. Bjerknes dolazi do svoje poznate teoreme o stvaranju vrtloga u tečnosti (1897), tj. do proširenja Helmholtzovih stavova o održavanju vrtloga. Ta Bjerknesova teorema bila je dugo nezapažena, a danas se pomoću nje tumače najraznovrsnije pojave cirkulacije vazduha u atmosferi.

I V. Bjerknes bio je inspirisan radovima H. Helmholtza. On je posvetio najveću pažnju problemu talasanja vazduha u atmosferi. Kako bi što jače potkrepio svoju hipotezu da su cikloni posledica određenih deformacija graničnih površina između različito zagrejanih slojeva vazduha, V. Bjerknes u više svojih teoriskih radova (1926, 27, 29, 33) razvija sistem pomoću koga mogu razna srazmerno mala poremećenja na graničnim površinama i u atmosferi uopšte srazmerno jednostavno da se reše. Tu se radi o linearizaciji diferencijalnih jednačina Eulerovog i Lagrangeovog sistema jednačina u relativnom sistemu koji zajedno sa Zemljom rotira. Rešavajući tako dobivene parcijalne diferencijalne jednačine dobija se uvek rešenje u vidu raznih talasa. Na taj način V.Bjerknes sa svojom školom (H. Solberg, J, Bjerknes, T. Bergeron i drugi) dolazi do poznate polarno-frontne teorije o postanku ciklona, prema kojoj su cikloni posledica talasanja hladnog polarnog ili nekog drugog hladnog vazduha i razvijaju se na onim mestima gde postaju talasi nestabilni (gde se amplituda u toku vremena povećava).

Naročita zasluga V. Bjerknesa i njegove škole za razvoj meteorologije leži i u njegovom zalaganju da se podiže nivo analize sinoptičkih vremenskih karata u dnevnoj operativi. Bjerknes predlaže milibar (1 mb = 1000 din/cm^2) kao jedinicu za pritisak, dinamički metar kao meru za vertikalna otstojanja, da se polje pritiska na visini prikazuje pomoću izohipsi standardnih izobarskih površina itd. U periodu između dva svetska rata Bergenska škola u čitavom svetu jako se afirmisala, u velikoj meri po zasluzi T.Bergerona i na dan Bjerknesove smrti radi po Bjerknesovom metodu 89 država sveta.

Već 1904. god. V. Bjerknes je napisao rad u kome posmatra problem prognoze vremena sa stanovišta matematike i fizike. On smatra problem prognoze vremena kao fizičko-matematički problem i na osnovu poznatih početnih i graničnih uslova, tj. na osnovu dovoljnog broja meteoroloških podataka traži integraljenjem jednačina hidrodinamike i termodinamike stanje atmosfere u budućnosti.

Radi se o vrlo složenom zadatku simultanog zadovoljenja sledećih jednačina: tri jednačine kretanja, jednačine kontinuiteta odn. jednačine graničnih uslova na graničnim površinama, spoljašnjim i unutrašnjim, jednačine stanja vazduha i jednačine prvog i drugog prіncipa termodinamike gde treba uzeti u obzir zakone toplotne provodljivosti i zračenja.

Kad pokušamo da rešimo taj sistem jednačina vidimo da analitičkim putem možemo doći do rešenja samo pod izvesnim,i to vrlo velikim, ograničenjima koja više ili manje idealizuju prirodne uslove. Time se nađeno rešenje samo u nekom pogledu slaže sa stvarnim stanjem u atmosferi. U traženju tih rešenja bili su od strane raznih istraživača izvršeni najveći napori i pronađeni su vrlo značajni rezultati. U ovom pogledu treba spomenuti pored V. Bjerknesa prvenstveno njegove saradnike H. Solberga i C.G. Rossbyja. Rossby je napr.našao (1939) jedno rešenje, uzimajući u obzir i menjanje Coriolisovog parametra sa geografskom širinom. Time je našao tzv. duge talase, što je Namias pokušao da primeni u svojoj srednjeročnoj prognozi vremena.

Zbog poteškoća matematičke prirode sva takva rešenja najčešće se traže pod pretpostavkom da su sile trenja zanemarljivo male i da se kretanje vrši ili adijabatski ili izotermski. Često se pretpostavlja i nestišljivost vazduha.

Možemo reći da u tražnju prognoze vremena, kao jednog od ciljeva dinamičke meteorologije, ovaj put nije doveo meteorologiju do zadovoljavajućih praktičnih rezultata. Tražeći drugi put engleski teoretičar L.F. Richardson pokazao je (1922) da se može rešenje pomenutog sistema jednačina tražiti na taj način da se prvo mesto diferencijalnih jednačina napiše približne jednačine diferencija koje se mogu posle u principu lako rešiti (numerička integracija). Zbog velikih tehničkih poteškoća taj put na početku nije mogao biti primenjivan.

Posle rata bio je pronađen račun relaksacije za izračunavanje običnih linearnih jednačina,a pronađene su i elektronske računske mašine, što sve je otvorilo put praktičnoj primeni Richardsonovog metoda. Na problemu numeričke prognoze radili su i rade najistaknutiji meteorolozi-matematičari Charney, Eliassen, Fjörtoft, Hinkelmann, Hollmann i drugi. O tome biće reči u drugom delu udžbenika.

Razvoju dinamičke meteorologije doprineli su mnogo i radovi meteorologa-teoretičara H. Ertela i J. van Mieghema, odličnih poznavalaca matematike i moderne matematičke simbolike, T. Hesselberga, S. Petterssena, D. Brunta, B. Haurwizt-a i drugih čije radove u ovom kratkom prikazu ne možemo navoditi.

Dinamička meteorologija treba da reši još mnogo problema, čak od osnovnog značaja za pravilno gledanje na razna zbivanja u atmosferi. Ovde mislimo prvenstveno na probleme pretvaranja energije u atmosferi, prenošenja energije kompresionim talasima, numeričke prognoze itd.

Meteorolozi-teoretičari danas se prvenstveno bave numeričkom prognozom vremena i razradom metodike numeričkog integraljenja raznih jednačina koje se primenjuju u meteorologiji. Srazmerno malo je interesovanja za razne meteorološke pojave koje su kompleksne prirode i koje može da prati i proučava samo dobar poznavalac zakona kretanja vazduha u atmosferi pod raznim prirodnim uslovima. Tako je napr. Margules proučavao prodore hladnog vazduha na području Beča i na osnovu sopstvenih zapažanja došao do teorije o značaju težinske potencijalne energije relativno hladnih vazdušnih masa za kinetičku energiju vetrova. V. Bjerknes i njegova škola, prvenstveno T. Bergeron, posvetili su se u Bergenu, posle 1917. godine brižljivom proučavanju prizemnih podataka i tim putem došli (J. Bjerknes, H. Solberg, 1921) najpre do poznate šeme razvoja "idealnog ciklona" a posle do raznih osnovnih saznanja u vezi sa razvojem ciklona i anticiklona. U otsustvu aeroloških podataka došli su samo na osnovu prizemnih podataka (indirektna aerologija) do svojih poznatih trodimenzionalnih analiza vremenskih situacija. Vrlo brižljivo je proučavao prodore hladnog vazduha i H. Kosch - mieder, a i kod nas u okviru radova Aerološke opservatorije u Beogradu bila je tom problemu posvećena najveća pažnja (obrađeni su svi zapaženi prodori hladnog vazduha u FNRJ u toku 1951 i 1952 god.)

Čudno je da se inače sistematskom proučavanju prodora hladnog vazduha kao i drugih kompleksnih atmosferskih pojava posvećuje srazmerno vrlo mala pažnja i da se zbog toga tek danas dolazi do izvesnih saznanja koja su po našem mišljenju od posebnog značaja za pravilno razumevanje atmosferske dinamike kao i za dalja teoriska istraživanja. Statističkom obradom zapaženih pojava dolazi se do izvesnih činjenica, do zapažanja, do kojih inače meteorolog teoretičar, iako najbolji matematičar, nikako ne bi mogao doći. Dolazi se do zapažanja koja služe kao baza za dalje teoriska istraživanja. Mislim da se može tvrditi da u tom pogledu očekuju meteorologiju još vrlo zamašni zadaci i značajni rezultati.

Brižljivim i sistematskim proučavanjem strujnog polja u pojedinim oblastima u atmosferi i sređivanjem podataka po individualnim i sličnim situacijama dolazimo do neke srednje slike stvarnog stanja i mogućeg razvoja vremena, dolazimo do "integrala pod prirodnim uslovima" uslovnih jednačina dinamike i termodinamike atmosfere.

U ovakvom radu vidimo najšire mogućnosti za dalji razvoj ne samo teoriske već i praktične meteorologije sa ciljem da se postigne što bolja prognoza vremena.

Udaljivanje od prirodnih zbivanja lako dovede istraživača do rezultata koji su sa teoriske strane vrlo interesantni ali su sa praktične strane beznačajni i ne pretstavljaju neki doprinos razjašnjenju meteoroloških pojava. Kako bez primene matematike ne možemo tumačiti, tj. na fizičko-matematički način opisati makoju atmosfersku pojavu, tako isto se ne možemo približiti svestranom tumačenju tih pojava samo primenom matematike i redukcijom na idealne slučajeve. Možemo očekivati zbog toga da je put čvrstog povezivanja meteorologa teoretičara sa stvarnim zbivanjima u atmosferi, u smislu gornjih nagoveštaja, put koji nas sigurno vodi do velikih rezultata.

REGISTAR